ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნინო ბრეგვაძე

# ერთი კლასის სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების სენსიტიური ანალიზი

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი თამაზ თადუმაძე

თბილისი 2019

# სარჩევი

# ანოტაცია

არაწრფივი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის მუდმივი დაგვიანებით ფაზურ კოორდინატებში განხორციელეულია სენსიტიური ანალიზი ანუ დამტკიცებულია ანალიზური კავშირი თავდაპირველ განტოლებისა და საწყისი მონაცემების შეშფოთებით მიღებულ განტოლების ამონახსნებს შორის. საწყისი მონაცემების ქვეშ იგულისხმება დაგვიანების პარამეტრის, საწყისი და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. ამონახსნის ნაზრდის მთავარი ნაწილი (პირველი ვარიაცია) წარმოდგენილია წრფივად საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ, გამოვლენილია შეშფოთების ეფექტები. დადგენილია განტოლებისა და საწყისი პირობების სახე, რომლებსაც აკმაყოფილებს ზოგადი განტოლებისა და ეკონომიკური ზრდის მოდელის პირველი ვარიაცია.დადგენილია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ანალიზური სახე. საილუსტრაციოდ განხილულია მაგალითი.

## Summary

For the controlled functional-differential equation with the one constant delay in the phase coordinates carried out the sensitivity analysis or the analytic relation between solutions of the origin equation and the equation obtained by perturbation of the initial data. Under the initial data we imply a collection of the delay parameter, the initial and control functions. The main part of the increment of solution (the first variation) is presented in the linear with respect to initial data, the effects of perturbation are revealed. The form of equation and initial conditions is established , which satisfies the first variation of general equation and economic growth model. The analytic form approximate solution of the perturbed equation is established. For illustration an example is considered.

# შესავალი

დინამიური სამართი სისტემა, რომლის ყოფაქცევა დროის $t$ მომენტში დამოკიდებულია თავის მდგომარეობაზე როგორც $t$ მომენტში ასევე დროის წინა $t-\tau$ მომენტში (წარსულში), როგორც წესი, აღიწერება დაგვიანების შემცველი სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}(t) = f(t; x(t), x(t-\tau), u(t))), x(t) \in R^n \tag{2.1}$$

სადაც რიცხვს $\tau > 0$ ეწოდება დაგვიანება (დაგვიანების ფაქტორი), ხოლო $u(t) \in R^r$ - მართვის ფუნქცია ( მართვა ).
(2.1) განტოლებით აღიწერება მრავალი ეკონომიკური, ბიოლოგიური და ფიზიკური პროცესი. საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ ეკონომიკური ზრდის მოდელი.
ვთქვათ, $p(t)$ არის დროის $t$ მომენტში გამოშვებული ერთი სახის პროდუქციის რაოდენობა გამოსახული ფულად ერთეულში. ეკონომიკური ზრდის ობიექტური კანონის თანახმად $p(t)$ წარმოდგენილი უნდა იქნეს ორი შესაკრების სახით

$$p(t) = a(t) + i(t) \tag{2.2}$$

სადაც $a(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება თანამშრომელთა ხელფასებს, სოციალურ დახმარებებს და ა. შ. $i(t)$ არის თანხა, რომელიც ხმარდება ახალი დანადგარების შეძენას, ახალი ტექნოლოგიების დანერგვას და ა. შ. (შიგა ინვესტიცია). განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $a(t)$ და $i(t)$ ფუნქციებს აქვთ სახე:

$$a(t) = u_1(t)p(t) \tag{2.3}$$

$$i(t) = u_2(t)p(t-\tau) + \alpha\dot{p}(t) \tag{2.4}$$

სადაც $u_i(t) \in (0,1), i = 1,2$ არის მართვის ფუნქციები, ხოლო $\alpha > 0$ არის მოცემული რიცხვი. $p(t-\tau)$ არის გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა $t-\tau$ მომენტში, ხოლო $\dot{p}(t)$ არის არის $t$ მომენტში გამოშვებული პროდუქციის ცვლილების მაჩვენებელი. (2.2)-დან (2.3)-(2.4)ის გათვალისწინებით მივიღებთ დაგვიანების შემცველ სამართ ფუნქციონალურ -დიფერენციალურ განტოლებას

$$\dot{p}(t) = \frac{1-u_1(t)}{\alpha}p(t) - \frac{u_2(t)}{\alpha}p(t-\tau)$$

სენსიტიური ანალიზი ნიშნავს ანალიზური კავშირის დამყარებას თავდაპირველი და შეშფოთებული განტოლებების ამონახსნებს შორის. სენსიტიური ანალიზი მნიშვნელოვანია, იგი საშუალებას იძლევა: განტოლების ამოუხსნელად დადგენილ იქნეს პროცესის ევოლუციის ხასიათი და მასზე შეშფოთებების გავლენის ეფექტები, დიფერენციალურ მოდელებში განხორციელდეს სხვადასხვა კონცენტრაციების (ვირუსების, პოპულაციების და ა.შ.) დინამიკის პროგნოზირება; დადგენილი იქნეს შეშფოთებული განტოლების მიახლოებით ამონახსნის ანალიზური სახე.

ნაშრომში, დამტკიცებულია ანალიზური კავშირი თავდაპირველი კოშის ამოცანისა

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_0), u_0(t)), t \in [t_0, t_1], x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$x(t) = \varphi_0(t), t \in [t_0 - \tau_0, t_0]$$

და $\tau_0$ დაგვიანების, $\varphi_0(t)$ საწყისი ფუნქციის, $u_0(t)$ მართვის ფუნქციის შეშფოთებით მიღებული კოშის ამოცანის ამონახსნებს შორის. განტოლების სენსიტიურ ანალიზს მრავალი გამოკვლევა მიეძღვნა, მათ შორის ნაშრომები [1; 2]-ში ჩატარებული კვლევებისა წარმოდგენილ ნაშრომში საწყისი ფუნქციისა და მართვის შეშფოთებებთან ერთად მხედველობაში მიიღება დაგვიანების შეშფოთებაც.

პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ნაშრომის ძირითადი შედეგი (თეორემა 3.0.1), რომელიც შემდეგში მდგომარეობს : დადგენილია ანალიზური კავშირი ამონახსნებს შორს , ამონახსნის ნაზრდის მთავარი ნაწილის (პირველი ვარიაციის) წარმოდგენა წრფივად საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ; აღწერილია საწყისი მონაცემების შეშფოთების ეფექტები; დადგენილია განტოლების და საწყისი მნიშვნელობების სახე, რომელსაც აკმაყოფილებს პირველი ვარიაცია როგორც ზოგადი შემთხვევისთვის ასევე ეკონომიკური ზრდის მოდელისთვის; განხილულია მაგალითი, ანალიზურ სახით აგებულია მისი შესაბამისი შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი.

მეორე პარაგრაფი შეიცავს დამხმარე დებულებებს, რომლებიც ეხება კოშის ფორმულას, ლიფშიცურობას და კოშის ამოცანის კორექტულობას.

მესამე პარაგრაფში ამონახსნის ნაზრდი გამოთვლილია საწყის მომენტში და დადგენილია მისი შეფასების რიგი შეშფოთებების მიმართ.

მეოთხე პარგრაფში დამტკიცებული თეორემა 3.0.1, ხოლო ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია დასკვნა და ლიტერატურის ნუსხა. სამაგისტრო ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა და იგი შესრულებულია [3; 4] შრომების საფუძველზე.

# ძირითადი შედეგის ფორმულირება.მაგალითი

ვთქვათ, $I = [t_0, t_1]$ არის სასრული ინტერვალი და $0 < \tau_1 < \tau_2$ მოცემული რიცხვებია. დავუშვათ, $O \subset \mathbb{R}^n$ და $U \subset \mathbb{R}^r$ ღია სიმრავლეებია.

ვთქვათ, $n$-განზომილებიანი ფუნქცია $f(t, x, y, u)$ არის უწყვეტი $I \times O^2 \times U$ და უწყვეტად წარმოებადი $x$,$y$ და $u$ ცვლადების მიმართ. ვთქვათ, $\Phi$ არის უწყვეტად წარმოებადი, $\varphi : I_1 = [\hat{\tau}, t_1]- > O$ ფუნქციების სიმრავლე, სადაც $\hat{\tau} = t_0 - \tau_2$. $\Omega$ არის ზომადი $u(t), t \in I$ ფუნქციების სიმრავლე, რომლების აკმაყოფილებს პირობას: $clu(I) \subset U$ და კომპაქტია $\mathbb{R}^r$-ში.

ყოველ $\mu = (\tau, \varphi, u) \in \Lambda = [\tau_1, \tau_2] \times \Phi \times \Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau), u(t)), t \in I \tag{3.1}$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0] \tag{3.2}$$

საწყისი პირობის უწყვეტობა ნიშნავს, რომ საწყისი ფუნქციისა და ტრაექტორიის მნიშვნელობები საწყის მომენტში ყოველთვის ემთხვევა, ანუ $x(t_0) = \varphi(t_0)$ .

**განსაზღვრება 1.** *ვთქვათ, $\mu = (\tau, \varphi, u) \in \Lambda$. ფუნქციას $x(t; \mu) \in O, t \in I_1$ ეწოდება (3.1) განტოლების ამონახსნი (3.2) საწყისი პირობით ან $\mu$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $I_1$ ინტერვალზე, თუ $x(t; \mu)$ აკმაყოფილებს (3.2) პირობას და არის აბსოლუტურად უწყვეტი $I$ ინტერვალზე და აკმაყოფილებს (3.1) განტოლებას თითქმის ყველგან $I$-ზე.*

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$|\mu| = |\tau| + \|\varphi\|_1 + \|u\|,$$

$$\Lambda_\varepsilon(\mu_0) = \{\mu \in \Lambda : |\mu - \mu_0| \le \varepsilon\},$$

სადაც

$$\|\varphi\|_1 = sup\{|\varphi(t)| + |\dot{\varphi}(t)| : t \in I_1\},$$

$$\|u\| = sup\{|u(t)| : t \in I\},$$

ხოლო $\varepsilon > 0$ არის ფიქსირებული რიცხვი, $\mu_0 = (\tau_0, \varphi_0, u_0) \in \Lambda$ არის ფიქსირებული ელემენტი. შემდეგ,

$$\delta\tau = \tau - \tau_0,$$

$$\delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t),$$

$$\delta u(t) = u(t) - u_0(t),$$

$$\delta\mu = \mu - \mu_0 = (\delta\tau, \delta\varphi, \delta u)$$

$$|\delta\mu| = |\delta\tau| + \|\delta\varphi\|_1 + \|\delta u\|$$

ვთქვათ, $x(t; \mu_0)$ იყოს $\mu_0 \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრულია $I_1$ ინტერვალზე. მაშინ არსებობს $\varepsilon_1 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველ ელემენტს $\mu \in \Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$ შეესაბამება $x(t; \mu)$ ამონახსნი განსაზღვრული $I_1$ ინტერვალზე (იხ. ლემა.4.0.1).

**თეორემა 3.0.1.** *ვთქვათ, $x_0(t) = x(t;\mu_0)$ არის $\mu_0 = (\tau_0, \varphi_0, u_0) \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $I_1$ ინტერვალზე, სადაც $\tau_0 \in (\tau_1, \tau_2)$ და $t_0 + \tau_0 < t_1$ . მაშინ არსებობს რიცხვი $\varepsilon_1 > 0$ ისეთი, რომ ყოველი $\mu \in \Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$-სთვის შესრულებულია შემდეგი ტოლობა:*

$$x(t;\mu) = x_0(t) + \delta x(t;\delta\mu) + o(t;\delta\mu), t \in I_1, \tag{3.3}$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu) = Y(t_0;t)\delta\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau_0}^{t_0} Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds -$$

$$\{\int_{t_0}^{t} Y(s;t) f_y[s]\dot{x}_0(s-\tau_0)ds\}\delta\tau + \int_{t_0}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds, \tag{3.4}$$

და

$$\lim_{\delta\mu\to 0} \frac{|o(t;\delta\mu)|}{|\delta\mu|} = 0$$

თანაბრად $t \in I$ -თვის.
აქ $Y(s;t)$ არის $n \times n$ მატრიც-ფუნქცია რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$Y_s(s;t) = -Y(s;t) f_x[s] - Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0], s \in [t_0, t] \tag{3.5}$$

და საწყის პირობას

$$Y(s;t) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t; \end{cases} . \tag{3.6}$$

E და $\Theta$ არის შესაბამისად ერთეულოვანი და ნულოვანი მარტიცები.

$$f_x[s] = f_x(s, x_0(s), x_0(s-\tau_0), u_0(s))$$

ზოგიერთი კომენტარი:

$\delta x(t;\delta\mu)$ ფუნქციას ეწოდება $x_0(t)$ ამონახსნის პირველი ვარიაცია. (3.4) გამოსახულებას კი ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა.ტერმინი „ამონახსნის ვარიაციის ფორმულა"შემოღებულ იყო რ.ვ. გამყრელიძის მიერ და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის იგი დამტკიცებულია [1]-ში .
შესაკრები

$$Y(t_0;t)\delta\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau_0}^{t_0} Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds$$

(3.4)-ში არის საწყისი $\varphi_0(t)$ ფუნქციის შეშფოთების ეფექტი.
(3.4) ტოლობის შემდეგი წევრი

$$\{\int_{t_0}^{t} Y(s;t) f_y[s]\dot{x}_0(s-\tau_0)ds\}\delta\tau$$

არის $\tau_0$ დაგვიანების შეშფოთების ეფექტი.
(3.4) ფორმულის ბოლო წევრი

$$\int_{t_0}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds$$

არის სამართი $u_0(t)$ ფუნქციის შეშფოთების ეფექტი.

კოშის ფორმულაზე დაყრდნობით,(იხ. ლემა 4.0.2) დავასკვნით, რომ ფუნქცია

$$\delta x(t) = \begin{cases} \delta\varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0] \\ \delta x(t; \delta\mu), t \in (t_0, t_1] \end{cases}$$

არის ქვემოთ მოცემული განტოლების ამონახსნი:

$$\dot{\delta x}(t) = f_x[t]\delta x(t) + f_y[t]\dot{x_0}(t-\tau_0)\delta\tau + f_u[t]\delta u(t), t \in I \tag{3.7}$$

საწყისი პირობით

$$\delta x(t) = \delta\varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0] \tag{3.8}$$

(3.7)-ს ეწოდება განტოლება ვარიაციებში.

მაგალითად, ეკონომიკური ზრდის მოდელისთვის(იხ. შესავალი)

$$\dot{p}(t) = \frac{1-u_{10}(t)}{\alpha}p(t) - \frac{u_{20}(t)}{\alpha}p(t-\tau_0), t \in I,$$

$$p(t) = \varphi_0(t), t \in [\hat{\tau}, t_0]$$

შესაბამისი (3.7) ტიპის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე.

$$\dot{\delta p}(t) = \frac{1-u_{10}(t)}{\alpha}\delta p(t) - \frac{u_{20}(t)}{\alpha}\delta p(t-\tau_0) + \frac{u_{20}(t)}{\alpha}\dot{p}_0(t-\tau_0)\delta\tau -$$

$$-\frac{p_0(t)}{\alpha}\delta u_1(t) - \frac{p_0(t-\tau_0)}{\alpha}\delta u_2(t),$$

$$\delta p(t) = \delta\varphi(t), t \in [\tau, t_0].$$

(3.3) ფორმულიდან მცირე $\delta\mu$-ებისთვის ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი ანალიზურად. სახელდობრ,

$$x(t;\mu) \approx x_0(t) + \delta x(t; \delta\mu), t \in I. \tag{3.9}$$

ბოლო ფორმულის გამოყენებით, ქვემოთ განხილული მაგალითისთვის ავაგოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი.

მაგალითი:

ვთქვათ, ა) $t_0 = 0, t_1 = 2, \tau_1 = 0.5, \tau_2 = 1.5, \tau_0 = 1, \varphi_0(t) = 1,$

$$u_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2(t+1)^2+1}, t \in [0,1], \\ \sqrt{2(t+1)^2+t^2}, t \in [1,2]. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში $\mu_0 = (1, 1, u_0)$ .
განვიხილოთ სკალარული განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-1), u_0(t)) = 2x^2(t) + x^2(t-1) - u_0^2(t) + 1, t \in [0, 2],$$

საწყისი პირობით

$$x(t) = 1, t \in [-1.5, 0].$$

მარტივი დასანახია, რომ

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, t \in [-1.5, 0] \\ t + 1, t \in [0, 2]. \end{cases}$$

ბ) შეშფოთებული განტოლება

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-1-\rho_1), u(t)) = 2x^2(t) + x^2(t-1-\rho_1) - [u_0(t) + \rho_3 sint]^2 + 1, t \in [0, 2],$$

შეშფოთებული საწყისი პირობით

$$x(t) = 1 + 2\rho_2 cost, t \in [-1.5, 0]$$

სადაც, $|\rho_i|, i = 1, 2, 3$ არის მცირე ფიქსირებული რიცხვები. ამ შემთხვევაში, ჩვენ გვაქვს

$$\mu = (1 + \rho_1, 1 + 2\rho_2 cost, u_0(t) + \rho_3 sint),$$
$$\delta\tau = \rho_1,$$
$$\delta\varphi(t) = 2\rho_2 cost,$$
$$\delta u(t) = \rho_3 sint,$$

გ) ცხადია, რომ

$$f_x[t] = 4x_0(t) = 4(t + 1),$$
$$f_y(t) = 2x_0(t-1),$$
$$f_u(t) = -2u_0(t).$$

(3.7)-(3.8)-დან მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\dot{x}(t) = 4(t+1)\delta x(t) + 2x_0(t-1)\delta x(t-1) - 2\rho_1 x_0(t-1)\dot{x_0}(t-1) - 2\rho_3 sint u_0(t)$$

$$\delta x(t) = 2\rho_2 cost, t \in [-1.5, 0].$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ

$$\delta x(t; \delta\mu) = \begin{cases} \delta x_1(t), t \in [0, 1], \\ \delta x_2(t), t \in [1, 2] \end{cases} \tag{3.10}$$

სადაც,

$$\delta x_1(t) = 2\{e^{2t(t+2)}[\rho_2 + \int_0^1 e^{-2s(s+2)}(2\rho_2 cos(s-1) - \rho_3 sins \times \sqrt{2(s+1)^2+1})ds]\},$$

$$\delta x_2(t) = e^{2(t^2+2t-3)}\{\delta x_1(1) + \int_1^t e^{-2(s^2+2s-3)}(2s\delta x_1(s-1) - 2\rho_1 s - 2\rho_3 sins \times \sqrt{2(s+1)^2+s^2}ds\}.$$

საბოლოოდ, შეშფოთებული ამოცანის მიახლოებითი $x(t;\mu)$ ამონახსნი მიიღებს სახეს

$$x(t;\mu) \approx t + 1 + \delta x(t;\delta\mu), t \in [0,2],$$

იხილეთ (3.10) .

# დამხმარე დებულებები

**ლემა 4.0.1.** *(უწყვეტობის თეორემა) [3. გვ. 18] ვთქვათ, $x_0(t)$ არის $\mu_0 = (\tau_0, \varphi_0, u_0) \in \Lambda$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განსაზღვრული $I_1$ ინტერვალზე. მაშინ, არსებობს ისეთი $\varepsilon_1 > 0$ რიცხვი, რომ ყოველ $\mu = (\tau, \varphi, u) \in \Lambda_{\varepsilon_1}(\mu_0)$ ელემენტს შეესაბამება $x(t;\mu)$ ამონახსნი განსაზღვრული $I_1$ ინტერვალზე, სადაც $x(t;\mu) \in K_1$ და $u(t) \in U_1$ , $K_1 \subset O$ არის კომპაქტი, რომელიც მოიცავს $x_0(I_1)$ მიდამოს და $U_1$ არის კომპაქტი, რომელიც მოიცავს $clu_0(I)$ მიდამოს.*

**ლემა 4.0.2.** *(კოშის ფორმულა). ვთქვათ $A(t), B(t), t \in I$ ინტეგრებადი მატრიც-ფუნქციებია განზომილებით $n \times n$ ; $f(t)$- ინტეგრებადი n განზომილებიანი სვეტ ვექტორ-ფუნქციაა, $\varphi \in \Phi$ მოცემული საწყისი ფუნქციაა.*
*განვიხილოთ კოშის ამოცანა*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t), t \in [t_0, t_1], \\ x(t) = \varphi(t), t \in [\hat{\tau}, t_0].x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

*(4.1) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t \in [\hat{\tau}, t_1]$. ამოცანის ამონახსნი $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე წარმოიდგინება ფორმულით*

$$x(t) = Y(t_0;t)\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(s+\tau;t)B(s+\tau)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^{t} Y(s;t)f(s)ds,$$

*სადაც $Y(s;t)$ არის მატრიც-ფუნქცია განზომილებით $n \times n$, იგი აკმაყოფილებს განტოლებას*

$$\frac{\partial}{\partial s}Y(s;t) = -Y(s;t)A(s) - Y(s+\tau;t)B(s+\tau), s \in [t_0, t] \tag{4.2}$$

*და პირობას*

$$Y(s;t) = \begin{cases} E, s = t, \\ \Theta, s > t, \end{cases} \tag{4.3}$$

*სადაც, $E$ არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო $\Theta$ -ნულოვანი მატრიცა.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $t \in (t_0, t_1]$ და $s \in [t_0, t]$ . განტოლების

$$\dot{x}(s) = A(s)x(s) + B(s)x(s-\tau) + f(s), s \in [t_0, t]$$

ორივე მხარე გავამრავლოთ (4.3) თვისების მქონე $Y(s;t)$ მატრიცზე, რომელიც აკმაყოფილებს (4.2) განტოლებას და ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობა $[t_0, t]$ , ინტერვალზე და მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} Y(s;t)\dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t}[A(s)x(s) + B(s)x(s-\tau) + f(s)]ds. \tag{4.4}$$

ფუნქცია $Y(s;t)$ აბსოლუტურად უწყვეტია s-ის მიმართ, ამიტომ ნაწილობითი ინტეგრების ძალით და (4.3) პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_{t_0}^{t} Y(s;t)\dot{x}(s)ds = x(t) - Y(t_0;t)x_0 - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} Y(s;t)x(s)ds. \tag{4.5}$$

ცვლადთა გარდაქმნით და (4.3) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} Y(s;t)B(s)x(s-\tau)ds = \int_{t_0-\tau}^{t-\tau} Y(s+\tau;t)B(s+\tau)x(s)ds$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(s+\tau;t)B(s+\tau)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^{t} Y(s;t)B(s+\tau)x(s)ds \tag{4.6}$$

(4.4)-დან (4.5),(4.6) ფორმულების გათვალისწინებით და გარკვეული წევრების დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ

$$x(t) = y(t_0;t)x_0 + \int_{t_0-\tau}^{t_0} Y(s+\tau;t)B(s+\tau)\varphi(s)ds + \int_{t_0}^{t} Y(s;t)f(s)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t}[\frac{\partial}{\partial s}Y(s;t) + Y(s;t)A(s) + Y(s+\tau;t)B(s+\tau)]x(s)ds.$$

აქედან მიიღება კოშის ფორმულა.

□

**ლემა 4.0.3.** *ვთქვათ,* $K_2 \subset O$ *და* $U_2 \subset U$ *კომპაქტური სიმრავლეებია, თანაც*

$$K_1 \subset intK_2, U_1 \subset intU_2,$$

*მაშინ არსებობს ისეთი კომპაქტი* $Q \subset O^2 \times U$ *და ისეთი უწყვეტად წარმოებადი სკალარული ფუნქცია*

$$\chi(x,y,u), (x,y,u) \in R^n \times R^n \times R^r$$

*რომ ადგილი აქვს შემდეგს:*

$$K_1^2 \times U_1 \subset Q \subset int(k_2^2 \times U_2),$$

$$\chi(x,y,u) = \begin{cases} 1, (x,y,u) \in Q, \\ 0, (x,y,u) \overline{\in} K_2^2 \times U_2. \end{cases}$$

**ლემა 4.0.4.** *(ლიფშიცურობა) არსებობს $L > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას*

$$|f(t,x_1,y_1,u_1) - f(t,x_2,y_2,u_2)| \le L(|x_1 - x_2)| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|)$$

$$\forall(t,x_1,y_1) \in I \times K_1^2, \forall(x_2,y_2) \in K_1^2, \forall(u_1,u_2) \in U_1^2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ ფუნქცია

$$g = (g^1,...,g^n)^T = \chi f = (\chi f^1,...,\chi f^n)^T,$$

სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას,
(იხ. ლემა. 4.0.3)
ცხადია, რომ

$$\forall(x,y,u)\overline{\in} K_2^2 \times U_2; \forall t \in I$$

გვაქვს

$$|g_x(t,x,y,u)| + |g_y(t,x,y,u)| + |g_u(t,x,y,u)| = 0. \tag{4.7}$$

ვთქვათ, $(x,y,u) \in K_2^2 \times U_2$. ადვილი მისახვედრია, რომ ვთქვათ

$$|g_x| = [\sum_{i,j=1}^{n} |g_{x^j}^i|^2]^{1/2} \le \sum_{i,j=1}^{n} |(\chi f^i)_{x^j}|,$$

$$|g_y| = [\sum_{i,j=1}^{n} |g_{y^j}^i|^2]^{1/2} \le \sum_{i,j=1}^{n} |(\chi f^i)_{y^j}|,$$

$$|g_u| = [\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} |g_{u^j}^i|^2]^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} |(\chi f^i)_{u^j}|.$$

სადაც

$$(\chi f^i)_{x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\chi f^i).$$

გვაქვს,

$$|(\chi f^i)_{x^j}| \le |f^i||\chi_{x^j}| + |f_{x^j}^i| \le m(1+\alpha);$$

$$|(\chi f^i)_{y^j}| \le |f^i||X_{y^j}| + |f_{y^j}^i| \le m(1+\alpha), j = \overline{1,n};$$

$$|(\chi f^i)_{u^j}| \le |f^i||X_{u^j}| + |f_{u^j}^i| \le m(1+\alpha), j = \overline{1,r},$$

სადაც

$$\alpha = sup|\chi_x(x,y,u)| + \chi_y(x,y,u)| + |\chi_u(x,y,u)| : (x,y,u) \in R^n \times R^n \times R^r,$$

$$m = sup|f_x(t,x,y,u)| + |f_y(t,x,y,u)| + |f_u(t,x,y,u)| : (t,x,y,u) \in I \times K_2^2 \times_U {}_2.$$

ამრიგად, $\forall(t,x,y,u) \in I \times K_2^2 \times U_2$ მივიღებთ

$$|g_x(t,x,y,u)| + |g_y(t,x,y,u)| + |g_(t,x,y,u)| \leq L, \tag{4.8}$$

სადაც

$$L = (2n^2 + nr)(\alpha + 1).$$

ცხადია (4.8) სამართლიანია $(t,x,y,u) \in I \times R^n \times R^n \times R^r$ (იხ.(4.7)).
ვთქვათ $(x_1, y_1, u_1) \in K_1^2 \times U_1, (x_2, y_2, u_2) \in K_1^2 \times U_1$ ნებისმიერი წერტილებია. მაშინ გვექნება (იხ.ლემა 4.0.3)

$$|f(t,x_1,y_1,u_1) - f(t,x_2,y_2,u_2)| = |g(t,x_1,y_1,u_1) - g(t,x_2,y_2,u_2)| =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} g(t, x_2 + \theta(x_1 - x_2), y_2 + \theta(y_1 - y_2), u_2 + \theta(u_1 - u_2))|d\theta \leq$$

$$\int_0^1 [|g_x(t, x_2 + \theta(x_1 - x_2), y_2 + \theta(y_1 - y_2), u_2 + \theta(u_1 - u_2))||x_1 - x_2| +$$

$$|g_y(t, x_2 + \theta(x_1 - x_2), y_2 + \theta(y_1 - y_2), u_2 + \theta(u_1 - u_2))||y_1 - y_2| +$$

$$|g_u(t, x_2 + \theta(x_1 - x_2), y_2 + \theta(y_1 - y_2), u_2 + \theta(u_1 - u_2))||u_1 - u2|]d\theta$$
$$\leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|)$$

□

**ლემა 4.0.5.** *(გრონუოლის უტოლობა) ვთქვათ $v(t) \geq 0$ უწყვეტი ფუნქციაა და ვთქვათ ადგილი აქვს უტოლობას*

$$v(t) \leq c + L\int_{t_0}^t v(s)ds, t \in I,$$

*სადაც $c \geq 0$ . მაშინ*

$$v(t) \leq ce^{L(t_1 - t_0)}.$$

# თეორემა 3.0.1-ის დამტკიცება

$\Delta x(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta} x(t) = f_x[t]\Delta x(t) + f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) + f_u[t]\delta u(t) + r(t;\delta\mu) \tag{5.1}$$

$I$ ინტერვალზე (იხ.(5.3)), სადაც

$$r(t;\delta\mu) := a(t;\delta\mu) - f_x[t]\Delta x(t) - f_y[t]\Delta x(t-\tau_0) - f_u[t]\delta u(t). \tag{5.2}$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით,(5.1) განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი ფორმით

$$\Delta x(t) = Y(t_0;t)\delta\varphi(t_0) + \int_{t_0-\tau_0}^{t_0} Y(s+\tau_0;t) f_y[s+\tau_0]\delta\varphi(s)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} Y(s;t) f_u[s]\delta u(s)ds + R(t;\delta\mu) \tag{5.3}$$

სადაც $Y(s;t)$ არის $n \times n$ მატრიც-ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3.5) და (3.6) პირობებს;

$$R(t;\delta\mu) = \int_{t_0}^{t} Y(s;t) r(s;\delta\mu)ds.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f[t;\theta,\delta\mu] = f(t, x_0(t)) + \theta\Delta x(t), x_0(t-\tau_0) + \theta[x_0(t-\tau)$$

$$-x_0(t-\tau_0) + \Delta x(t-\tau)], u_0(t) + \theta\delta u(t); \sigma(t;\theta,\delta\mu) =$$

$$f_x[t;\theta,\delta\mu] - f_x[t], \rho(t;\theta,\delta\mu) = f_y[t;\theta,\delta\mu] - f_y[t],$$

$$v(t;\theta,\delta\mu) = f_u[t;\theta,\delta\mu] - f_u[t]$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$a(t;\delta\mu)=\int_0^1 \frac{d}{dt}f(t;\theta,\delta\mu)d\theta=\int_0^1 f_x[t;\theta,\delta\mu][x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)]+$$

$$+f_u[t;\theta,\delta\mu\ \delta u(t)d\theta=\int_0^1 \sigma(t;\theta,\delta\mu)d\theta\Delta x(t)$$

$$+\int_0^1 \rho(t;\theta,\delta\mu)d\theta(x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau))+\int_0^1 v(t;\theta,\delta\mu)d\theta\delta u(t)+$$

$$f_x[t]\Delta x(t)+f_y[t][x_0(t-\tau)-x_0(t-\tau_0)+\Delta x(t-\tau)]+f_u[t]\delta u(t).$$

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$R(t;\delta\mu)=\sum_{i=1}^{5}R_i(t;\delta\mu)$$

სადაც

$$R_1(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\sigma_1(\xi;\delta\mu)\Delta x(\xi)d\xi,$$

$$\sigma_1(\xi;\delta\mu)=\int_0^1 \sigma_1(\xi;\theta,\delta\mu)d\theta;$$

$$R_2(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\rho_1(\xi;\delta\mu)[x_0(\xi-\tau_0)+\Delta x(\xi-\tau)]d\xi,$$

$$\rho_1(\xi;\delta\mu)=\int_0^1 \rho(\xi;\theta,\delta\mu)d\theta;$$

$$R_3(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_1}Y(\xi;t)f_y[\xi][x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)]\xi,$$

$$R_4(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{t_1}Y(\xi;t)v_1(\xi;\delta\mu)\delta u(\xi)d\xi,$$

$$R_5(t;\delta\mu)=\int_{t_0}^{Y}(\xi;t)v_1(\xi;\delta\mu)\delta u(\xi)d\xi,$$

$$v_1(\xi;\delta\mu)=\int_0^1 v(\xi;\theta,\delta\mu)d\theta.$$

ფუნქცია $x_0(t), t\in I_1$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ამასთან, ყოველი $\dot{x}(\xi-\tau_0)$ ფუნქციის ფიქსირებულ ლებეგის $\xi\in(t_0,t_1)$ წერტილისთვის

$$x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)=\int_{\xi}^{\xi-\delta\tau}\dot{x}_0(\varsigma-\tau_0)d\varsigma=-\dot{x}_0(\xi-\tau_0)\delta\tau+\gamma(\xi;\delta\tau), \qquad (5.4)$$

სადაც

$$\lim_{|\delta\tau->0|}\frac{|\gamma(\xi;\delta\tau)|}{|\delta\tau|}=0 \qquad (5.5)$$

ამრიგად (5.4) ტოლობას ადგილი ექნება თითქმის ყველა წერტილისთვის $I$ ინტერვალიდან.

(5.4)-დან $\dot{x}_0(t)$ ფუნქციის შემოსაზღვრულობის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$|x_0(\xi-\tau)-x_0(\xi-\tau_0)\leq O(\delta\mu);\frac{|\gamma(\xi;\delta\mu)|}{|\delta\mu|}|\leq const \quad (5.6)$$

ვთქვათ, $s_1=min\{t_0+\tau_0,t_0+\tau\}$ და $s_2=max\{t_0+\tau_0,t_0+\tau\}$ .

თუ $\xi\in[t_0,s_1]$ მაშინ $\xi-\tau\leq t_0$ და $\xi-\tau_0\leq t_0$,
ამიტომ

$$\Delta x(\xi-\tau)-\Delta x(\xi-\tau_0)\leq\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}|\dot{\delta\varphi}(s)ds|\leq||\delta\varphi|||\delta\tau|\leq|\delta\mu|^2=o(\delta\mu) \quad (5.7)$$

თუ $t\in[s_1,s_2]$, მაშინ მივიღებთ

$$|\int_{s_1}^{s_2}Y(\xi;t)f_y[f][\Delta x(\xi-\tau)-x(\xi-\tau_0)]d\xi|\leq O(\delta\mu)||Y|||\int_{s_1}^{s_2}|f_y[\xi]|d\xi|\leq o(\delta\mu) \quad (5.8)$$

სადაც,

$$||Y||=sup|Y(\xi;t)|:(\xi,t)\in I^2.$$

ვთქვათ, $\xi\in[s_2,t_1]$, მაშინ გვექნება

$$\Delta x(\xi-\tau)-\Delta x(\xi-\tau_0)\leq\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}|\dot{\Delta}x(s)|ds\leq|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}|a(s;\delta\mu)|ds|$$

$$\leq L|\int_{\xi-\tau_0}^{\xi-\tau}[|\Delta x(s)|+|x_0(s-\tau)-x_0(s-\tau_0)|+|\Delta x(s-\tau)+|\delta u(s)|]ds|$$

$$\leq LO(\delta\mu)|\delta\tau|\leq LO(\delta\mu)|\delta\mu|=o(\delta\mu) \quad (5.9)$$

(იხ. (5.6) და (5.2)) (5.1), (5.7)-(5.9) ტოლობებიდან $R_i(t;\delta\mu),i=1,...5,$ გამოსახულებისთვის მივიღებთ შემდეგს

$$|R_1(t;\delta\mu)|\leq||Y||O(\delta\mu)\sigma_2(\delta\mu),$$

$$\sigma_2(\delta\mu)=\int_I|\sigma_1(\xi;\delta\mu)|d\xi;$$

$$|R_2(t;\delta\mu)|\leq||Y||O(\delta\mu)\rho_2(\delta\mu),$$

$$\rho_2(\delta\mu)=\int_I|\rho_1(\xi;\delta\mu)|d\xi;$$

$$R_3(t;\delta\mu) = -[\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_0)d\xi]d\tau + \gamma_1(t;\delta\tau);$$

$$|R_4(t;\delta\mu)| \le O(\delta\mu)$$

$$|R_5(t;\delta\mu)| \le ||Y||O(\delta\mu)v_2(\delta\mu),$$

$$v_2(\delta\mu) = \int_I |v_2(\xi;\delta\mu)|d\xi$$

სადაც

$$\gamma_1(t;\delta\tau) = \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\gamma(\xi;\delta\tau)d\xi$$

ცხადია, რომ

$$\frac{|\gamma_1(t;\delta\tau)|}{|\delta\mu|} \le ||Y|| \int_I |f_y[\xi]|\frac{\gamma(\xi;\delta\tau)|}{\delta\mu}d\xi \le ||Y|| \int_I |f_y[\xi]|\frac{\gamma(\xi;\delta\tau)|}{\delta\tau}d\xi.$$

ლებეგის თეორემის თანახმად,

$$\lim_{|\delta\mu|->0} \sigma_2(\delta\mu) = 0;$$

$$\lim_{|\delta\mu|->0} \rho_2(\delta\mu) = 0;$$

$$\lim_{|\delta\mu|->0} v_2(\delta\mu) = 0$$

$$\lim_{|\delta\mu|->0} \frac{|\gamma_1(t;\delta\tau)|}{\delta\mu} = 0, t \in I$$

( იხ (5.5),(5.6)) . მაშინ,

$$|R_i(t;\delta\mu)| = o(\delta\mu), i = 1,2,4,5 \tag{5.10}$$

$$R_3(t;\delta\mu) = -[\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f_y[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_0)d\xi]d\tau + o(t;\delta\mu). \tag{5.11}$$

(5.10) და (5.11)-ზე დაყრდნობით მივიღებთ

$$R(t;\delta\mu) = -[\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) f_y[\xi]\dot{x}_0(\xi-\tau_0)d\xi]d\tau + o(t;\delta\mu). \tag{5.12}$$

(5.3)-დან, (5.12)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ (3.6), სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$- ს აქვს (3.7)-ის სახე.

# დასკვნა

სამართი ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლებისთვის დაგვიანებით განხორციელებულია სენსიტიური ანალიზი ანუ დამყარებულია ანალიზური კავშირი თავდაპირველ და შეშფოთებულ განტოლებების ამონახსნებს შორის. ამონახსნის ნაზრდის მთავარი ნაწილი (პირველი ვარიაცია) წარმოდგენილია წრფივად საწყისი მონაცემების შეშფოთების მიმართ. დადგენილია განტოლებისა და საწყისი მონაცემების სახე, რომლებსაც აკმაყოფილებს პირველი ვარიაცია. დადგენილია შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის ანალიზური სახე.

# გამოყენებული ლიტერატურა

1. რ. გამყრელიძე, ოპტიმალური მართვის თეორიის საფუძვლები, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2017.
2. G. A. Bocharov , G. I. Marchuk , Applied problems of mathematical modeling in immunology. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. , 40:12 (2000), 1905-1920.
3. T. Tadumadze, Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems, Mem. Differential Equations Math. Phys. 70 (2017), pp. 7-97.
4. T.Tadumadze, Ph. Dvalishvili, T. Shavadze, About representation of solution of the perturbed controlled differential equation with delay and the continuous initial condition (წარდგენილია ჟურნალში Appl. Comput. Math.).