საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა

ტბელ აბუსერისძის სასწავლო

უნივერსიტეტი

ირინა მჟავანაძე

$\sum_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები

(ნაშრომი შესრულებულია სამაგისტრო ხარისხის მოსაპოვებლად)

ხელმძღვანელი: მათემატიკის აკადემიური დოქტორი

გიული თავდგირიძე

ბათუმი-2019

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ბინარულ მიმართებათა თეორიის განვითარება დაიწყო მათემატიკური ლოგიკის , როგორც მათემატიკის ერთ-ერთი დარგის აღმოცენებასთან ერთად და იგი ემსახურებოდა მის განვითარებას. ბინარულ მიმართებათა თეორიის საწყისი საფუძვლების განვითარებაში დიდი წვლილი მიუძღვის დე მორგანს , პირსს და ფრეგეს. შემდგომში ბინარულ მიმართებათა თეორის განვითარებაში დიდი როლი ითამაშა ფრანგმა მათემატიკოსმა რიგემ , მან ბინარულ მიმართებათა თეორია გამოიყენა დალაგებულ სიმრავლეთა შესასწავლად . ამჟამად ბინარული მიმართებები დიდ გამოყენებას პოულობს მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, ბიოლოგიასა და მათემატიკის სხვა მრავალ დარგში, აგრეთვე ავტომატთა თეორიაში..

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ბინარულ მიმართებათ თეორია და მესერთა თეორია ერთმანეთთან მჭიდროდ დაკავშირებული თეორიებია. გამომდინარე აქედან ამ თეორიათა პრობლემები შეიძლება გადაწყვეტილი იქნას მათი ერთმანეთთან მჭიდრო ურთიერთ კავშირის გათვალისწინებით.

ბინარულ მიმართებათა თეორია მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ალგებრის იმ დარგში რომელსც ნაწილობრივ ასახვათა თეორიას უწოდებენ. უკანასკნელი თეორიის შესწავლამ პირველად ვაგნერი მიიყვანა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის ცნებამდე.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში ცნობილია რომ ნებისმიერი ნახევარჯგუფი , რომელიმე სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის რომელიმე ქვენახევარჯგუფის იზომორფულია. გამომდინარე აქედან გამართლებულია ყველა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის რომელიმე ქვენახევარჯგუფის შესწავლა, რადგანაც ამ შემთხვევაში ფაქტიურად ხდება ბუნებაში არსებული ნახევარჯგუფების შესწავლა. ამ ნახევარჯგუფების შესწავლის ამოცანა განსაკუთრებით საინტერესო ხდება როცა შეისწავლება არა ცალკეული ნახევარჯგუფები, არამედ ბინარულ მიმართებათა

ნახევარჯგუფის რაღაც კლასი. ჩვენ განვიხილავთ ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფების ისეთ კლასებს , რომლებიც განისაზღვრებიან გაერთიანების სრული $X-$ ნახევარმესერთა კლასით.

ამ მეთოდით ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფებისა და მათი ზოგიერთი მნიშვნელოვანი კლასების სისტემატური შესწავლა პირველად გამოყენებული იქნა იაშა დიასამიძის მიერ თავის სადისერტაციო ნაშრომში (იხ. მონოგრაფია [1]). ეს არის ახალი მიმართულება, რომელსაც წარმოდგენილი მონოგრაფია ეძღვნება. ჩვენ შეგვიძლია აღვწეროთ ეს რამოდენიმე სიტყვით შემდეგნაირად.

ვთქვათ $\Sigma_n(X,m)$ არის m სიმძლავრის მქონე ყველა გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერების კლასი. $D_1,D_2,...,D_n$ ისეთი ელემენტებია $\Sigma(X,m)$ კლასიდან, რომელთაგან არცერთი ორი ერთმანეთის იზომორფული არ არის. საზოგადოდ $\Sigma_s(X,m)$ სიმბოლოთი აღინიშნება $\Sigma(X,m)$ კლასის ქვეკლასი, რომლის ყოველი ელემენტი იზომორფულია ფიქსირებული $D_s\ (1\le s\le n)$ გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერისა.

ასევე ცნობილია, რომ თუ $\varnothing\in D$. თუ $B_X(D_1)$ და $B_X(D_2)$ ნახევარჯგუფები, რომლებიც განსაზღვრული არიან D_1 და D_2 გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით, ერთმანეთის იზომორფულია, მაშინ ასევე იზომორფული იქნებიან D_1 და D_2 ნახევარმესერები, როგორც ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეები თეორიულ-სიმრავლური ჩართვის მიმართ. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნახევარჯგუფთა კლასი რომლებიც განსაზღვრული არიან $\Sigma_s(X,m)$ კლასის ნახევარმესერებით ჩაკეტილი არიან მათი იზომორფული სახეების მიმართ. მათი აბსტრაქტული თვისებები (ე.ი. ნახევარჯგუფთა ისეთი თვისებები, რომლებიც შეინახებიან მათი იზომორფიზმების დროს) ძირითადად განისაზღვრებიან D ნახევარმესერის თვისებებით. აქედან გამომდინარე ნახევარჯგუფებისა და ნახევარჯგუფთა კლასების შესწავლის აღნიშნული მეთოდი საკმაოდ პერსპექტიული და ეფექტურია.

კვლევის საგანია როგორც $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერები, ისე ამ ნახევარმესერებით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები, რადგანაც მოცემული ნახევარმესერები, როგორც გამოკვლევები გვიჩვენებენ, ატარებენ მნიშვნელოვან ინფორმაციას იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესახებ, რომლებსაც ისინი განსაზღვრავენ.

ნაშრომში პირველად განიხილება ბინარულ მიმართებათა იმ სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის კლასები, რომლებიც განსაზღვრულია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით. ნახევარჯგუფთა კლასისა და ამ კლასის თითოეული ელემენტის შესწავლა ხდება გაერთიანების სრულ X-ნახევარმესერის თვისებებზე დაყრდნობით. ნაშრომში მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს ამ ნახევარჯგუფის განმსაზღვრელი ნახევარმესერს დიაგრამაზე დაყრდნობით ვილაპარაკოთ მოცემული ნახევარჯგუფის დამახასიათებელ მრავალ თვისებაზე, კერძოდ გააჩნიათ თუ არა მარჯვენა ერთეულები, როგორი სახე ექნება მათ იდემპოტენტურ ელემენტებს, მაქსიმალურ ქვეჯგუფებს, რეგულარულ ელემენტებს და კიდევ სხვა მრავალ ფაქტზე.

ნაშროში აღწერილია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერები და გამოყოფილია მათგან $XI-$ქვენახევარმესერები. როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

აღწერილია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები და რეგულარული ელემენტები როცა X სასრული სიმრავლეა, გამოყვანილია რაოდენობის დათვლის ფორმულები. აგრეთვე აღწერილია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფები.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს. ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიის და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდი.

სამაგსიტრო ნაშრომი შედგება შესავლის 7 პარაგრაფისა და 1 დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაბადონებული გვერდი.

სარჩევი

1. ძირითადი აღნიშვნები, განმარტებები და თეორემები

ვთქვათ X რაღაც არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო D არის გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერი, ე.ი. D არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია მისი ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ, f არის რაღაც ასახვა X -დან D -ში. ყოველ ასეთ f

ასახვას შევუსაბამოთ α_f ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\alpha_f = \bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right).$$

ყველა ასეთი $\alpha_f\ (f : X \to D)$ ბინარული მიმართებების სიმრავლე აღვნიშნოთ $B_X(D)$ სიმბოლოთი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $B_X(D)$ არის ნახევარჯგუფი ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ და მას ეწოდება ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფი განსაზღვრული D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერებით.

$\varnothing$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ცარიელი ბინარული მიმართება ან X სიმრავლის ცარიელი ქვესიმრავლე. $(x,y)\in\alpha$ ჩანაწერს შემდგომში ჩავწერთ შემდეგი ფორმით $x\alpha y$.

ვთქვათ $(x,y)\in X,\ Y\subseteq X,\ \alpha\in B_X(D),\ T\in D,\ \varnothing\neq D'\subseteq D,\quad t\in\breve{D}=\bigcup_{Y\in D}Y\quad$ ($\breve{D}$ არის D სიმრავლის უდიდესი ელემენტი). შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
&y\alpha=\{x\in X \mid y\alpha x\},\ Y\alpha=\bigcup_{y\in Y}y\alpha,\ V(D,\alpha)=\{Y\alpha \mid Y\in D\},\\
&X^*=\{T \mid \varnothing\neq T\subseteq X\}, D'_t=\{Z'\in D' \mid t\in Z'\},\\
&Y_T^\alpha=\{x\in X \mid x\alpha=T\},\ D'_T=\{Z'\in D' \mid T\subseteq Z'\},\\
&\ddot{D}'_T=\{Z'\in D' \mid Z'\subseteq T\},\ \ l(D',T)=\cup(D'\setminus D'_T).
\end{aligned}$$

$\wedge(D,D_t)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ D_t სიმრავლის ქვედა საზღვრების სიმრავლე D ნახევარმესერში.

განმარტება 1.1. ვთქვათ $\varepsilon\in B_X(D)$. თუ $\varepsilon\circ\varepsilon=\varepsilon$, მაშინ ε ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარ-ჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი .

განმარტება 1.2 α ელემენტს აღებული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფიდან ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, თუ მოიძებნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ისეთი β ელემენტი, რომ $\alpha\circ\beta\circ\alpha=\alpha$. (იხ. [13], განმარტება 6.3.1.).

განმარტება 1.3. თუ D გაერთიანებათა ისეთი სრული $X-$ნახევარმესერია, რომელიც ერთდროულად აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $\wedge(D,D_t)\in D$ ყოველი $t\in\breve{D}$;

b) $Z=\bigcup_{t\in Z}\wedge\left(D,D_t\right)$, ნებისმიერი არაცარიელი $Z\in D$ ელემენტისათვის,

მაშინ $D-$ს გაერთიანებათა სრული $XI-$ნახევარმესერი ეწოდება

(იხ. [13], განმარტება 1.14.2).

განმარტება 1.4. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერია, $\alpha\in B_X\left(D\right)$ და $Y_T^{\alpha}=\left\{x\in X \mid x\alpha=T\right\}$. თუ

$$V[\alpha]=\begin{cases} V(X^*,\alpha), \text{ თუ } \varnothing\notin D, \\ V(X^*,\alpha), \text{ თუ } \varnothing\in V(X^*,\alpha), \\ V(X^*,\alpha)\cup\{\varnothing\}, \text{ თუ } \varnothing\notin V(X^*,\alpha) \text{ და } \varnothing\in D, \end{cases}$$

მაშინ ცხადია, რომ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი α ბინარული მიმართება შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმით

$$\alpha=\bigcup_{T\in V[\alpha]}(Y_T^{\alpha}\times T)$$

შემდგომში α ბინარული მიმართების ასეთ სახით წარმოდგენას კვაზინორ-მალურს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენის დროს არაა სავალდებულოო ნებისმიერი $T\in V[\alpha]-$სათვის Y_T^{α} განსხვავებული იყოს ცარიელი სიმრავლისაგან. მაგრამ ასეთი წარმოდგენისას ყოველთვის სრულდება პირობები:

a) $Y_T^{\alpha}\cap Y_{T'}^{\alpha}=\varnothing$, ნებისმიერი $T,T'\in D$ და $T\neq T'$;

b) $X=\bigcup_{T\in V[\alpha]}Y_T^{\alpha}$ (იხ. [13] განმარტება 1.11.1).

განმარტება 1.5. ვიტყვით, რომ არაცრიელ T სიმრავლეს ეწოდება D' სიმრავლის არაზღვარითი ელემენტი, თუ $T\setminus l\left(D',T\right)\neq\varnothing$ და ზღვარითი ელემენტი თუ $T\setminus l\left(D',T\right)=\varnothing$. (იხ. [13], განმარტება 1.13.1; განმარტება 1.13.2.).

განმარტება 1.6. რომელიმე φ ასახვას გაერთიანებათა სრულ $X-$ნახევარმესერებს D' და D'' შორის ეწოდება სრული იზომორფიზმი, თუ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$\varphi(D_1)=\bigcup_{T'\in D_1}\varphi(T')$, D' ნახევარმესერის ნებისმიერი არაცარიელი D_1 ქვესიმრავლისთვის (იხ. [13] განმარტება 6.3.2).

განმარტება 1.7. ვთქვათ $\alpha\in B_X(D)$ იტყვიან, რომ φ სრული იზომორფიზმი Q და D' $(Q,D'\subseteq D)$ გაერთიანებათა სრულ $X-$ნახევარმესერებს შორის არის სრული $\alpha-$ იზომორფიზმი, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $Q=V(D,\alpha)$;

b) $\varphi(\varnothing)=\varnothing$ თუ $\varnothing\in V(D,\alpha)$ და $\varphi(T)\alpha=T$ ნებისმიერი $T\in V(D,\alpha)$

(იხ. [13] განმარტება 6.3.3).

განმარტება 1.8. ვთქვათ $\varepsilon\in B_X(D)$ თუ $\alpha\circ\varepsilon=\alpha$ ნებისმიერი $\alpha\in B_X(D)$, მაშინ ε ეწოდება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული.

განმარტება 1.9 ვთქვათ $Q_i\vartheta_{XI}$ სიმბოლოთი აღვნიშნულია $\sum'_{XI}(X,D)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ϑ_{XI} ექვივალენტობის ის კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი Q_i $(i=1,2,3,\ldots,16)$ გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერის იზომორფულია (იხ. განმარტება 2.1.6) და $R^*(Q_i)=\bigcup_{D'\in Q_i\vartheta_{XI}}R(D')$, სადაც $i=1,2,\ldots,16$.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\Omega(Q)=Q\vartheta_{XI}$, ამიტომ $R(D')$ სიმრავლე შეიძლება ასეც განიმარტოს, კერძოდ, თუ $D'\in Q\vartheta_{XI}$, მაშინ $R(D')$ არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იმ რეგულარული α ელემენტების სიმრავლე, რომელთათვისაც Q და D' ერთმანეთის $\alpha-$ იზომორფულია და $V(D,\alpha)=D'$

თეორემა 1.1. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა, δ და q სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნულია D ნახევარმესერის ყველა ბაზისურ წყაროთა რიცხვი და D ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმთა რიცხვი. თუ $|X|=n\geq\delta$ და $|\Sigma_n(X,m)|=s$, მაშინ

$$s=\frac{1}{q}\cdot\sum_{p=\delta}^{m}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\left(\frac{(-1)^{p+i+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot C_p^{\delta}\cdot(\delta!)\cdot((p-\delta)!)\cdot i^n}{(i-1)!\ \cdot(p-i+1)!}\right)\right),$$

სადაც $C_j^k=\dfrac{j!}{k!\ \cdot(j-k)!}$ (იხ. [13], თეორემა 11.5.1).

თეორემა 1.2. ვთქვათ D არის გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი შეიცავს მარჯვენა ერთეულს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა D არის გაერთიანებათა $XI-$ნახევარმესერი. (იხ. [13], თეორემა 6.1.3).

თეორემა 1.3 ვთქვათ D სასრული გაერთიანებათა $X-$ნახევარმესერია, $\alpha\in B_X(D)$, $D(\alpha)$ არის $Q=V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}$ ნახევარმესერის ყველა იმ T ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც არაზღვარითია $\ddot{Q}_T\ (T\in Q)$ სიმრავლეში და $\alpha=\bigcup\limits_{T\in V(D,\alpha)}\left(Y_T^\alpha\times T\right)$ არის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენა. ასეთ შემთხვევაში α ბინარული მიმართება იქნება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $V(D,\alpha)$ გაერთიანებათა $XI-$ნახევარმესერია და რომელიღაც φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმისათვის $V(D,\alpha)$ და $D'\ (D'\subseteq D)$ ნახევარმესერებს შორის სრულდება შემდეგი პირობები:

a) $\bigcup\limits_{T'\in\ddot{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T)$ ყოველი $T\in D(\alpha)$სათვის;

b) $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ ყოველი არაზღვარითი $T\in\ddot{D}(\alpha)_T-$სათვის

(იხ. [13], თეორემა 6.3.3).

თეორემა 1.4. ვთქვათ R_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $R(D')\cap R(D'')=\varnothing$ ნებისმიერი $D',D''\in\Sigma_{XI}(D)$ და $D'\neq D''$;

b) $R_D=\bigcup\limits_{D'\in\Sigma_{XI}(D)}R(D')$;

c) თუ X არის სასრული სიმრავლე, მაშინ $|R_D|=\sum\limits_{D'\in\Sigma_{XI}(D)}|R(D')|$

(იხ.[13],თეორემა 6.3.6).

თეორემა 1.5. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α რეგულარული ელემენტი არის ამავე ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც φ ასახვა რომელიც განმარტებულია პირობით $\varphi(T)=T\alpha$ ნებისმიერი $T\in V(D,\alpha)$-თვის არის $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერის იგივური ასახვა. (იხ. [13], თეორემა 6.3.4).

თეორემა 1.6. ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა და $D(\alpha)$ არის $Q=V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}$ ნახევარმესერის ისეთი T ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც $\ddot{Q}_T$ სიმრავლის არაზღვარითი ელემენტებია. α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\bigcup\limits_{T\in V(D,\alpha)}\left(Y_T^\alpha\times T\right)$, არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

a) $V(D,\alpha)$ არის გაერთიანებათა სრული $XI-$ნახევარმესერი;

b) $\bigcup\limits_{T'\in\ddot{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha\supseteq T$ ნებისმიერი $T\in D(\alpha)$;

c) $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$ ნებისმიერი არაზღვარითი T ემელენტისათვის $\ddot{D}(\alpha)_T$ სიმრავლიდან

თეორემა 1.7. ვთქვათ D, $\Sigma(D)$, $E_X^{(r)}(D')$ და I სიმრავლეები შესაბამისად არიან გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერი, მოცემული D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ ქვენახევარმესერების სიმრავლე, $B_X(D')$ $\left(D'\in\Sigma(D)\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების სიმრავლე. მაშინ შემდეგი პირობები არის სამართლიანი:

a) თუ $\varnothing\in D$ და $\Sigma_\varnothing(D)=\left\{D'\in\Sigma(D)\,|\,\varnothing\in D'\right\}$, მაშინ

1) $E_X^{(r)}(D')\cap E_X^{(r)}(D'')=\varnothing$ ნებისმიერი $D'\neq D''$ ელემენტებისათვის $\Sigma_\varnothing(D)$ სიმ-რავლიდან

.

2) $I=\bigcup\limits_{D'\in\Sigma_\varnothing(D)} E_X^{(r)}(D')$;

3) თუ X სასრულო სიმრავლეა, მაშინ $|I|=\sum\limits_{D'\in\Sigma_\varnothing(D)}\left|\,E_X^{(r)}(D')\,\right|$

b) if $\varnothing\notin D$, მაშინ

1) $E_X^{(r)}(D')\cap E_X^{(r)}(D'')=\varnothing$ ნებისმიერი $D'\neq D''$ ელემენტებისათვის $\Sigma(D)$ სიმრავლიდან;

2) $I=\bigcup_{D'\in\Sigma(D)} E_X^{(r)}(D')$;

3) თუ X სასრული სიმრავლე, მაშინ $|I|=\sum_{D'\in\Sigma(D)}\left|E_X^{(r)}(D')\right|$ (იხ.[13], თეორემა 6.2.3).

თეორემა 1.8. $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება მაშინ და მხოლოდ მაშინ არის მოცემული ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, როცა α იდემპოტენტია და $D=V(D,\alpha)$ (იხ.[13], თეორემა 4.1.3).

თეორემა 1.9. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერია. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი მაშინ და მხოლოდ მაშინ შეიცავს მარჯვენა ერთეულს, როცა D არის $XI-$ ნახევარმესერი.

ლემა 1.1. ვთქვათ $Y=\{y_1,y_2,...,y_k\}$ და $D_j=\{T_1,...,T_j\}$ რაღაც სიმრავლეებია, სადაც $k\geq 1$ და $j\geq 1$. მაშინ Y სიმრავლის ყველა შესაძლო ასახვათა $s(k,j)$ რიცხვი D_j სიმრავლის ისეთ D'_j ქვესიმრავლეზე, რომ $T_j\in D'_j$, შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულით $s(k,j)=j^k-(j-1)^k$ (იხ.([13], შედეგი 1.18.1).

ლემა 1.2. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერია. თუ ε ბინარული მიმართება წარმოდგენილი შემდეგი სახით

$$\varepsilon=\bigcup_{t\in\breve{D}}\left(\{t\}\times\wedge(D,D_t)\right)\cup\left(\left(X\setminus\breve{D}\right)\times\breve{D}\right)$$

არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეული, მაშინ ε არის უდიდესი მარჯვენა ერთეული მოცემული ნახევარჯგუფის (იხ.[13], ლემა 12.1.2).

ლემა 1.3. ვთქვათ $D_j=\{T_1,T_2,...T_j\}$, X და $Y-$ ისეთი სიმრავლეებია, რომ $\varnothing\neq Y\subseteq X$. თუ f არის ისეთი ასახვა X სიმრავლისა D_j სიმრავლეში, რომ $f(y)=T_j$ რომელიღაც $y\in Y$, მაშინ ასეთი f ასახვების s რიცხვი გამოითვლება ფორმულით $s=j^{|X\setminus Y|}\cdot\left(j^{|Y|}-(j-1)^{|Y|}\right)$ (იხ.([13], თეორემა 1.18.1).

თეორემა 1.10. ვთქვათ $D=\left\{\breve{D},Z_1,Z_2,...,Z_{m-1}\right\}$ გაერთიანებათა რომელიღაც სრული X – ნახევარმესერია, ხოლო $C(D)=\left\{P_0,P_1,P_2,...,P_{m-1}\right\}$ არის X სიმრავლის წყვილ- წყვილად თანაუკვეთ ქვესიმრავლეთა რაღაც ოჯახი. თუ φ არის D ნახევარმესერის $C(D)$ სიმრავლეთა ოჯახზე ასახვა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $\varphi(\breve{D})=P_0$ და $\varphi(Z_i)=P_i$ ნებისმიერი $i=1,2,...,m-1$ და $\hat{D}_Z=D\setminus\{T\in D\,|\,Z\subseteq T\}$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\breve{D}=P_0\cup P_1\cup P_2\cup...\cup P_{m-1},$$

$$Z_i=P_0\cup\bigcup_{T\in\hat{D}_{Z_i}}\varphi(T)\,(1.2)$$

ამ ტოლობებს შემდეგში ფორმალური ტოლობები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ D ნახევარმესერის ელემენტების (1.2) წარმოდგენისას P_i $(i=0,1,2,...,m-1)$ პარამეტრებს შორის არსებობს ისეთები, რომლებიც მოცემული D ნახევარმესერისათვის არ შეიძლება იყვნენ ცარიელი სიმრავლეები. ასეთ P_i $(0<i\le m-1)$ სიმრავლეებს ბაზისური წყაროები ეწოდება და შემდგომში მათ რიცხვს აღვნიშნავთ δ სიმბოლოთი, ხოლო იმ P_j $(0\le j\le m-1)$ პარამეტრებს, რომლებიც შეიძლება იყვნენ ცარიელი სიმრავლეებიც, სისავსის წყაროები ეწოდება.

მტკიცდება, რომ φ ასახვისას ბაზისური წყაროს წინასახის დამფარავი ელემენტების რაოდენობა ყოველთვის ერთის ტოლია, ხოლო სისავსის წყაროების დამფარავი ელემენტები ან არ არსებობენ, ან მათი რაოდენობა მეტია ერთზე.

თეორემა 1.11. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\ge 1)$ არის D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომლისთვისაც $T_0\subset T_1\subset T_2\subset...\subset T_m$, მაშინ Q ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა $XI-$ნახევარმესერი.

თეორემა 1.12. ვთქვათ $Q=\left\{T_0,T_1,...,T_j,...,T_m\right\}$ $(m\ge 3)$არის D გაერთიანებათა სრული $X-$ ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0\le j\le m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset \ldots \subset T_m,$$
$$T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset \ldots \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}$$

მაშინ Q ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა $XI-$ნახევარმესერი.

თეორემა 1.13. თუ Q არის ბადე, მაშინ ის ყოველთვის იქნება გაერთიანებათა $XI-$ ნახევარმესერი

თეორემა 1.15. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m \geq 1)$ არის გაერთიანებათა D ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^{\alpha} \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ არსებობს სრული φ $\alpha-$იზომორფიზმი Q ნახევარმესერიდან D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \{\varphi(T_0), \varphi(T_1), ..., \varphi(T_m)\}$ ქვენახევარმესერზე , რომ სრულდება შემდეგი პირობები $Y_0^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_p^{\alpha} \supseteq \varphi(T_p)$ და $Y_q^{\alpha} \cap \varphi(T_q) \neq \varnothing$ ნებისმიერი $p=0,1,...,m-1$ და $q=1,2,\ldots,m$. (იხ.[13], თეორემა 13.1.1).

შედეგი 1.1. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m \geq 1)$არის გაერთიანებათა D ნახევარმესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_m$. მაშინ $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^{\alpha} \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\alpha)$, არის მოცემული $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_0^{\alpha} \cup Y_1^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_p^{\alpha} \supseteq T_p$ და $Y_q^{\alpha} \cap T_q \neq \varnothing$ ნებისმიერი $p=0,1,...,m-1$ და $q=1,2,\ldots,m$

(იხ.[13], შედეგი 13.1.1).

თეორემა 1.16. ვთქვათ $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m \geq 1)$ არის D გაერთიანების ნახევარ-მესერის ისეთი ქვენახევარმესერი, რომ $T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_m$. თუ გაერთიანებათა $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $XI-$ ნახევარმესერი და $D' = \{\overline{T}_0, \overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_m\}$ არიან იზომორფულები და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$\left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_0\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|} - 2^{\left|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1\right|}\right) \cdots \left(\left(m+1\right)^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|} - m^{\left|\overline{T}_m \setminus \overline{T}_{m-1}\right|}\right) \cdot \left(m+1\right)^{\left|X \setminus \overline{T}_m\right|}.$$

(იხ.[13], თეორემა 13.1.2).

შედეგი 1.2. ვთქვათ $Q = \{T_0, T_1, ..., T_m\}$ $(m \geq 1)$ არის გაერთიანებათა ნახევარმესესრი, სადაც $T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_m$. თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე , მაშინ

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{\left|T_1 \setminus T_0\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|T_2 \setminus T_1\right|} - 2^{\left|T_2 \setminus T_1\right|}\right) \cdots \left(\left(m+1\right)^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|} - m^{\left|T_m \setminus T_{m-1}\right|}\right) \cdot \left(m+1\right)^{\left|X \setminus T_m\right|}.$$

(იხ.[13], შედეგი 13.1.5).

თეორემა 1.17. ვთქვათ $Q = \left\{T_0, T_1, ..., T_j, ..., T_m\right\}$ $(m \geq 3)$ არის გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერი და j ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m,\ T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing, T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing, T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

მაშინ $B_X(Q)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^\alpha \times T_i\right)$ და სრულდება პირობა $Q = V\left(D, \alpha\right)$, არის $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც $D' = \left\{\varphi\left(T_0\right), ..., \varphi\left(T_m\right)\right\}$ ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_j^\alpha \supseteq \varphi\left(T_{j+1}\right) \cap \varphi\left(T_{j+2}\right),\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_j^\alpha \cup Y_{j+2}^\alpha \supseteq \varphi\left(T_{j+2}\right),$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup ... \cup Y_p^\alpha \supseteq \varphi\left(T_p\right),\ Y_q^\alpha \cap \varphi\left(T_q\right) \neq \varnothing$$

ნებისმიერი $p = 0, 1, 2, ..., m-1$, $q = 1, 2, ..., m$ -თვის, $\left(p \neq j+2,\ q \neq j+3\right)$

(იხ.[13], თეორემა 13.3.1).

შედეგი 1.3. ვთქვათ $Q = \left\{T_0, T_1, ..., T_j, ..., T_m\right\}$ $(m \geq 3)$ არის ნახევარმესერი და j ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, რომ $0 \leq j \leq m-3$ და

$$T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+1} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m,\ T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_j \subset T_{j+2} \subset T_{j+3} \subset ... \subset T_m,$$
$$T_{j+1} \setminus T_{j+2} \neq \varnothing,\ T_{j+2} \setminus T_{j+1} \neq \varnothing,\ T_{j+1} \cup T_{j+2} = T_{j+3}.$$

მაშინ $B_X(Q)$ ნეხევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha=\bigcup_{i=0}^{m}\left(Y_i^\alpha\times T_i\right)$ და სრულდება პირობა $Q=V(D,\alpha)$, არის $B_X(D)$ ნეხევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\ldots\cup Y_j^\alpha\supseteq T_{j+1}\cap T_{j+2},\ Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\ldots\cup Y_j^\alpha\cup Y_{j+2}^\alpha\supseteq T_{j+2},$$
$$Y_0^\alpha\cup Y_1^\alpha\cup\ldots\cup Y_p^\alpha\supseteq T_p,\ Y_q^\alpha\cap T_q\neq\varnothing$$

ნებისმიერი $p=0,1,2,\ldots,m-1$, $q=1,2,\ldots,m$ $\left(p\neq j+2,\ q\neq j+3\right)$

(იხ.[13], შედეგი 13.3.1).

თეორემა. 1.18. ვთქვათ $Q=\left\{T_0,T_1,\ldots,T_j,\ldots,T_m\right\}(m\geq 3)$ არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0\leq j\leq m-3$ და

$$T_0\subset T_1\subset\ldots\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset\ldots\subset T_m,\ T_0\subset T_1\subset\ldots\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset\ldots\subset T_m,$$
$$T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing, T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing, T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}.$$

თუ $XI-$ნახევარმესერები $Q=\left\{T_0,T_1,\ldots,T_m\right\}$ და $D'=\left\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\ldots,\overline{T}_m\right\}$ ერთმანეთის $\alpha-$იზომორფულია და $\left|\Omega(Q)\right|=m_0$, მაშინ

$$\textbf{a})\ \left|R(D')\right|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3\right|}-4^{\left|\overline{T}_4\setminus\overline{T}_3\right|}\right)\cdots$$
$$\cdots\left((m+1)^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}-m^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}\right)\cdot(m+1)^{\left|X\setminus\overline{T}_m\right|},$$

თუ $j=0$ (ე.ი. $T_j=T_0$);

$$\textbf{b})\ \left|R(D')\right|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_0\right|}-1\right)\cdots\left((j+1)^{\left|\overline{T}_{j-1}\setminus\overline{T}_{j-2}\right|}-j^{\left|\overline{T}_{j-1}\setminus\overline{T}_{j-2}\right|}\right)\cdot(j+1)^{\left|(\overline{T}_{j+1}\cap\overline{T}_{j+2})\setminus\overline{T}_j\right|}\cdot\left((j+2)^{\left|\overline{T}_{j+1}\setminus\overline{T}_{j+2}\right|}-(j+1)^{\left|\overline{T}_{j+1}\setminus\overline{T}_{j+2}\right|}\right)\cdot$$
$$\cdot\left((j+2)^{\left|\overline{T}_{j+2}\setminus\overline{T}_{j+1}\right|}-(j+1)^{\left|\overline{T}_{j+2}\setminus\overline{T}_{j+1}\right|}\right)\cdot\left((j+5)^{\left|\overline{T}_{j+4}\setminus\overline{T}_{j+3}\right|}-(j+4)^{\left|\overline{T}_{j+4}\setminus\overline{T}_{j+3}\right|}\right)\cdot\left((m+1)^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}-m^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}\right)\cdot(m+1)^{\left|X\setminus\overline{T}_m\right|}.$$

თუ $1\leq j\leq m-3$ $\left(T_j\neq T_0\right)$

(იხ.[13], თეორემა 13.3.2).

შედეგი 1.4. ვთქვათ $Q=\left\{T_0,T_1,\ldots,T_j,\ldots,T_m\right\}$ $(m\geq 3)$ არის ნახევარმესერი და j არის ისეთი ფიქსირებული ნატურალური რიცხვი, რომ $0\leq j\leq m-3$და

$$T_0\subset T_1\subset\ldots\subset T_j\subset T_{j+1}\subset T_{j+3}\subset\ldots\subset T_m,\ T_0\subset T_1\subset\ldots\subset T_j\subset T_{j+2}\subset T_{j+3}\subset\ldots\subset T_m,$$
$$T_{j+1}\setminus T_{j+2}\neq\varnothing, T_{j+2}\setminus T_{j+1}\neq\varnothing, T_{j+1}\cup T_{j+2}=T_{j+3}.$$

თუ $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარმესერის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე, მაშინ შემდეგი პირობები არის სამართლიანი:

a) $\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_1\setminus T_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|T_2\setminus T_1|}-1\right)\cdot\left(5^{|T_4\setminus T_3|}-4^{|T_4\setminus T_3|}\right)\cdots\left((m+1)^{|T_m\setminus T_{m-1}|}-m^{|T_m\setminus T_{m-1}|}\right)\cdot(m+1)^{|X\setminus T_m|}$,

თუ $j=0$ $\left(i.e.,\ T_j = T_0\right)$;

b) $\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_1\setminus T_0|}-1\right)\cdots\left((j+1)^{|\bar{T}_j\setminus \bar{T}_{j-1}|}-j^{|\bar{T}_j\setminus \bar{T}_{j-1}|}\right)\cdot(j+1)^{|(T_{j+1}\cap T_{j+2})\setminus T_j|}\cdot\left((j+2)^{|T_{j+1}\setminus T_{j+2}|}-(j+1)^{|T_{j+1}\setminus T_{j+2}|}\right)\cdot$
$\cdot\left((j+2)^{|T_{j+2}\setminus T_{j+1}|}-(j+1)^{|T_{j+2}\setminus T_{j+1}|}\right)\cdot\left((j+5)^{|T_{j+4}\setminus T_{j+3}|}-(j+4)^{|T_{j+4}\setminus T_{j+3}|}\right)\cdots\left((m+1)^{|T_m\setminus T_{m-1}|}-m^{|T_m\setminus T_{m-1}|}\right)\cdot(m+1)^{|X\setminus T_m|}$,

თუ $1\le j\le m-3$ $\left(T_j \ne T_0\right)$ (იხ.[13], შედეგი 13.3.3).

თეორემა 1.19. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი არის ბადე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij}\in Q}\left(Y_{ij}^{\alpha}\times T_{ij}\right)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D,\alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}
&Y_{00}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{0k})\cap\varphi(T_{s0}),\ Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{01}),\ Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{02}),\dots\\
&\dots,Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha}\cup\dots\cup Y_{0k}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{0k}),\ Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{10}),\\
&Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha}\cup Y_{20}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{20}),\dots,Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha}\cup Y_{20}^{\alpha}\cup\dots\cup Y_{s0}^{\alpha}\supseteq\varphi(T_{s0}),\ Y_{ij}^{\alpha}\cap\varphi(T_{ij})\ne\varnothing
\end{aligned}$$

ნებისმიერი $T_{ij}\in(Q_1\cup Q_2)\setminus\{\varnothing\}$ -თვის (იხ.[13], თეორემა 13.7.1).

შედეგი 1.5. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის Q ქვენახევარმესერი არის ბადე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{T_{ij}\in Q}\left(Y_{ij}^{\alpha}\times T_{ij}\right)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D,\alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$
\begin{aligned}
&Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02},\ldots \\
&\ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10}, \\
&Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20},\ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0}, \\
&Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing
\end{aligned}
$$

ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$. (იხ.[13], თეორემა 13.7.2).

თეორემა 1.20. ვთქვათ D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}, T_{20}, T_{21}\}$ ქვენახევარმესერი არის ბადე. თუ $XI-$ნახევარმესერები Q და $D' = \{\overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{11}, \overline{T}_{20}, \overline{T}_{21}\}$ ერთმანეთის $\alpha-$ იზომორფულია და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ

$$
|R(D')| = m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_{01} \setminus \overline{T}_{20}|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\overline{T}_{10} \setminus \overline{T}_{01}|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\overline{T}_{20} \setminus \overline{T}_{11}|} - 2^{|\overline{T}_{20} \setminus \overline{T}_{11}|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \overline{T}_{21}|}
$$

(იხ.[13], შედეგი 13.7.3).

შედეგი 1.6. ვთქვათ Q გაერთიანებათა X – ნახევარმესერი არის ბადე. თუ $E_X^{(r)}(Q)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლეს, მაშინ მათი რიცხვი გამოითვლება ფორმულით

$$
\begin{aligned}
\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = &\left(2^{|T_{10} \setminus T_{0k}|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T_{20} \setminus T_{1k}|} - 2^{|T_{20} \setminus T_{1k}|}\right) \cdots \left(s^{|T_{s-10} \setminus T_{s-2k}|} - (s-1)^{|T_{s-10} \setminus T_{s-2k}|}\right) \cdot \\
&\cdot \left((s+1)^{|T_{s0} \setminus T_{s-1k}|} - s^{|T_{s0} \setminus T_{s-1k}|}\right) \cdot \left(2^{|T_{01} \setminus T_{s0}|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T_{02} \setminus T_{s1}|} - 2^{|T_{02} \setminus T_{s1}|}\right) \cdots \\
&\cdot \left(k^{|T_{0k-1} \setminus T_{sk-2}|} - (k-1)^{|T_{0k-1} \setminus T_{sk-2}|}\right) \cdot \left((k+1)^{|T_{0k} \setminus T_{sk-1}|} - k^{|T_{0k} \setminus T_{sk-1}|}\right) \cdot |D|^{|X \setminus T_{sk}|}.
\end{aligned}
$$

(იხ.[13], შედეგი 13.7.1).

თეორემა 1.21. ვთქვათ Q არის გაერთიანებათა ნახევარმესერი, რომელიც მოცემულია ნახაზი 1.1-ზე მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება , რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m} \left(Y_i^{\alpha} \times T_i\right)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D, \alpha)$, არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული D იზომორფიზმი გაერთიანებათა Q ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის D' რომელიღაც ქვენახევარესერზე რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_0^\alpha \supseteq \varphi(T_0),\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(T_1),\ Y_0^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(T_2),$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(T_4),\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq \varphi(T_5),\ldots,$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \ldots \cup Y_{m-3}^\alpha \cup Y_{m-2}^\alpha \supseteq \varphi(T_{m-2}),\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \ldots \cup Y_{m-3}^\alpha \cup Y_{m-1}^\alpha \supseteq \varphi(T_{m-1}),$$
$$Y_1^\alpha \cap \varphi(T_1) \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap \varphi(T_2) \neq \varnothing,\ Y_4^\alpha \cap \varphi(T_4) \neq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cap \varphi(T_5) \neq \varnothing,\ldots,$$
$$Y_{m-2}^\alpha \cap \varphi(T_{m-2}) \neq \varnothing,\ Y_{m-1}^\alpha \cap \varphi(T_{m-1}) \neq \varnothing.$$

(იხ. [13], თეორემა 13.11.1).

შედეგი 1.7. ვთქვათ Q არის გაერთიანებათა ნახევარმესერი, რომელიც მოცემულია ნახაზი 1.1-ზე. მაშინ $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება, რომლის კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = \bigcup_{i=0}^{m}(Y_i^\alpha \times T_i)$ და სრულდება პირობა $Q = V(D,\alpha)$, არის მოცემული $\varphi(\breve{D}) = C$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ , როცა

$$Y_0^\alpha \supseteq T_0,\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq T_1,\ Y_0^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq T_2,$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq T_4,\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup Y_2^\alpha \cup Y_3^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq T_5,\ldots,$$
$$Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \ldots \cup Y_{m-3}^\alpha \cup Y_{m-2}^\alpha \supseteq T_{m-2},\ Y_0^\alpha \cup Y_1^\alpha \cup \ldots \cup Y_{m-3}^\alpha \cup Y_{m-1}^\alpha \supseteq T_{m-1},$$
$$Y_1^\alpha \cap T_1 \neq \varnothing,\ Y_2^\alpha \cap T_2 \neq \varnothing,\ Y_4^\alpha \cap T_4 \neq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cap T_5 \neq \varnothing,\ldots,$$
$$Y_{m-2}^\alpha \cap T_{m-2} \neq \varnothing,\ Y_{m-1}^\alpha \cap T_{m-1} \neq \varnothing.$$

(იხ.[13], თეორემა 13.11.2).

თეორემა 1.22. ვთქვათ Q არის გაერთიანებათა ნახევარმესერი, რომელიც მოცემულია ნახაზი 1.1-ზე. თუ Q ნახევარმესერი და $D' = \{\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \ldots,, \bar{T}_{m-3}, \bar{T}_{m-2}, \bar{T}_{m-1}, \bar{T}_m\}$ არიან $\alpha-$ იზომორფული და $|\Omega(Q)| = m_0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა :

$$\left|R(D')\right| = m_0 \cdot q \cdot \left(2^{|\bar{T}_2 \setminus \bar{T}_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|\bar{T}_1 \setminus \bar{T}_2|} - 1\right) \cdot 4^{|(\bar{T}_5 \cap \bar{T}_4) \setminus \bar{T}_3|} \cdot \left(5^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|} - 4^{|\bar{T}_5 \setminus \bar{T}_4|}\right) \cdot \left(5^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|} - 4^{|\bar{T}_4 \setminus \bar{T}_5|}\right) \cdots$$
$$\cdot (m-2)^{|(\bar{T}_{m-1} \cap \bar{T}_{m-2}) \setminus \bar{T}_{m-3}|} \cdot \left((m-1)^{|\bar{T}_{m-1} \setminus \bar{T}_{m-2}|} - (m-2)^{|\bar{T}_{m-1} \setminus \bar{T}_{m-2}|}\right) \cdot$$
$$\cdot \left((m-1)^{|\bar{T}_{m-2} \setminus \bar{T}_{m-1}|} - (m-2)^{|\bar{T}_{m-2} \setminus \bar{T}_{m-1}|}\right) \cdot |Q|^{|X \setminus \bar{T}_m|}. \square$$

(იხ.[13], თეორემა 13.11.4).

შედეგი 1.8. ვთქვათ Q არის გაერთიანებათა ნახევარმესერი რომელიც მოცემულია ნახაზი 1.1-ზე.და $E_X^{(r)}(Q)$ არის $B_X(Q)$ ნახევარჯგუფის ყველა მარჯვენა ერთეულების სიმრავლე . თუ X სასრულო სიმრავლეა მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \left(2^{|T_2\setminus T_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|T_1\setminus T_2|}-1\right)\cdot 4^{|(T_5\cap T_4)\setminus T_3|}\cdot\left(5^{|T_5\setminus T_4|}-4^{|T_5\setminus T_4|}\right)\cdot\left(5^{|T_4\setminus T_5|}-4^{|T_4\setminus T_5|}\right)\cdots$$
$$\cdot(m-2)^{|(T_{m-1}\cap T_{m-2})\setminus T_{m-3}|}\cdot\left((m-1)^{|T_{m-1}\setminus T_{m-2}|}-(m-2)^{|T_{m-1}\setminus T_{m-2}|}\right)\cdot$$
$$\cdot\left((m-1)^{|T_{m-2}\setminus T_{m-1}|}-(m-2)^{|T_{m-2}\setminus T_{m-1}|}\right)\cdot|Q|^{|X\setminus T_m|}.$$

(იხ.[13], შედეგი 13.10.1).

თეორემა 1.23. ვთქვათ X სარულო სიმრავლეა. თუ φ არის ფიქსირებული ელემენტი სიმრავლიდან $\Phi(Q,D')$ და $\Omega(Q)=m_0$ მაშინ $|R(D')| = m_0\cdot q\cdot\left|R_\varphi(Q,D')\right|$

(იხ.[13], თეორემა 6.3.5).

თეორემა 1.24. ვთქვათ Q არის D გაერთიანებათა $X-$ ნახევარმესერის რომელიღაც გაერთიანებათა $XI-$ ქვენახევარმესერი. თუ $i(Q,D)$ სიმბოლოთი ავღნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტების სიმრავლეს, რომებისთვისაც $V(D,\alpha)=Q$, მაშინ

$$i(Q,D)=\frac{1}{m_0\cdot q}\cdot|R(D')|.$$

(იხ.[13], შედეგი 6.3.6).

2. $\Sigma_{20}(\mathbf{X},6)$ კლასის ნახევარმესერების ქვენახევარმესერები

$\sum_{20}(X,6)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ გაერთიანების $X-$ ნახევარმესერთა კლასი, რომლის ყოველი ელემენტი რომელიღაც $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ გაერთიანების $X-$ ნახევარმესერის იზომორფულია და რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

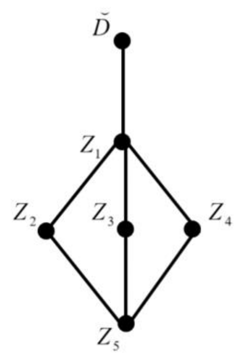
$$Z_5\subset Z_2\subset Z_1\subset\breve{D},\ Z_5\subset Z_3\subset Z_1\subset\breve{D}, Z_5\subset Z_4\subset Z_1\subset\breve{D}$$

$$Z_2\setminus Z_3\neq\varnothing, Z_3\setminus Z_4\neq\varnothing, Z_2\setminus Z_4\neq\varnothing$$

$$Z_3\setminus Z_2\neq\varnothing, Z_4\setminus Z_3\neq\varnothing, Z_4\setminus Z_2\neq\varnothing \tag{1.1}$$

$$Z_2 \cup Z_3 = Z_3 \cup Z_4 = Z_2 \cup Z_4 = Z_1$$

D ნახევარმესერი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობებს მოცემულია ნახაზი 1-ზე.



ნახაზი 1.

ლემა 1.1. ვთქვათ $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_{20}(X,6)$, $|\Sigma_{20}(X,6)| = s$ და $|X| \geq \delta \geq 4$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$s = \frac{1}{4} \cdot \left(3^n - 4 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n - 4 \cdot 6^n + 7^n\right)$$

დამტკიცება: ამ შემთხვევაში გვექნება: $m = 6$, $\delta = 4$, ავტომორფიზმთა რაოდენობა $q = 4$, მაშინ თეორემა 1.2-ის თანახმად გვექნება:

$$s = \frac{1}{4} \cdot \sum_{p=4}^{6} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{(-1)^{p+i+1} \cdot C_2^{p-6} \cdot C_p^4 \cdot (4!) \cdot ((p-4)!) \cdot i^n}{(i-1)! \ \cdot (p-i+1)!} \right) \right),$$

სადაც $C_j^k = \dfrac{j!}{k! \ \cdot (j-k)!}$. ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$s = \frac{1}{4} \cdot \left(3^n - 4 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n - 4 \cdot 6^n + 7^n\right)$$

ლემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.1. ვთქვათ $n = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ მაშინ:

$s = 48,\ 1680,\ 35520,\ 294000,\ 4198824$ და $\left|B_X\left(D\right)\right| = 4096,\ 32768,\ 262144,\ 2097152,\ 16777216.$

მოცემული რიცხვები გვიჩვენებს, რომ მაგალითად, თუ $\left|X\right| = 8$, მაშინ მოცემული კლასის ყველა ნახევარჯგუფთა ელემენტების რაოდენობა 4198824 ის ტოლია, ხოლო ელემენტების რაოდენობა თითოეულ ნახევარჯგუფში, რომელიც მოცემულ კლასს მიეკუთვნება, 16777216-ის ტოლია.

ახლა აღვწეროთ $\Sigma_3\left(X,8\right)$ კლასის ყველა ქვენახევარმესერი.

ლემა3.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}\left(X,6\right)$. მაშინ შემდეგი სახის სიმრავლეებით ამოიწურებიან $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერები.

1) $\left\{Z_5\right\}, \left\{Z_4\right\}, \left\{Z_3\right\}, \left\{Z_2\right\}, \left\{Z_1\right\}, \left\{\breve{D}\right\}$. (იხ. დიაგრამა 1 ნახაზი 3.2-ზე);

2) $\left\{Z_5, Z_4\right\}, \left\{Z_5, Z_3\right\}, \left\{Z_5, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_1\right\}, \left\{Z_5, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1\right\},$
$\left\{Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_1, \breve{D}\right\}.$

(იხ. დიაგრამა 2 ნახაზი 3.2-ზე);

3) $\left\{Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_1\right\},$
$\left\{Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}.$

(იხ. დიაგრამა 3 ნახაზი 3.2-ზე);

4) $\left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$

(იხ. დიაგრამა 4 ნახაზი 3.2-ზე);

5) $\left\{Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_4, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_3, Z_2, Z_1\right\}.$

(იხ. დიაგრამა 5 ნახაზი 3.2-ზე);

6) $\left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\right\}$ (იხ დიაგრამა 6 ნახაზი 3. 2-ზე);

7) $\left\{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}.$ (იხ დიაგრამა 7 ნახაზი 3. 2-ზე);

8) $\left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$. (იხ დიაგრამა 8ნახაზი 3. 2-ზე);

9) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\right\}$. (იხ დიაგრამა 9 ნახაზი 3. 2-ზე);

10) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

(იხ დიაგრამა 10 ნახაზი 3. 2-ზე);

11) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$. (იხ დიაგრამა 11ნახაზი 3. 2-ზე);

დამტკიცება:ცხადია, რომ D ნახევარმესერის ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლემის ქვენახევარმესერს წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის ორელემენტიან ქვესიმრავლეთა რიცხვი არის $C_6^2 = 15$.

$$\begin{aligned}
&\left\{Z_5, Z_4\right\}, \left\{Z_5, Z_3\right\}, \left\{Z_5, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_1\right\}, \left\{Z_5, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1\right\},\\
&\left\{Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_1, \breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_4, Z_2\right\}, \left\{Z_4, Z_3\right\}, \left\{Z_3, Z_2\right\}.
\end{aligned}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო 3 ქვესიმრავლე D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერს არ წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის სამელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის $C_6^3 = 20$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned}
&\left\{Z_5, Z_4, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_1, \breve{D}\right\} \left\{Z_5, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_3, \breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_5, Z_2, \breve{D}\right\} \left\{Z_5, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\},\\
&\left\{Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_4, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_3, Z_2, Z_1\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{Z_5, Z_4, Z_3\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2\right\}, \left\{Z_4, Z_3, Z_2\right\}\\
&\left\{Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}.
\end{aligned}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო 7 ქვესიმრავლე D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერს არ წარმოადგენს. D ნახევარმესერის ოთხელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის $C_6^4 = 15$. ეს ქვესიმრავლეებია:

$$\begin{aligned}
&\left\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \\
&\left\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \\
&\left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\right\}, \\
&\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\right\} \left\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_3, Z_2, D\right\}
\end{aligned}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო 5 ქვესიმრავლე D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერს არ წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის ხუთელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის $C_6^5 = 6$. ეს ქვესიმრავლეებია:

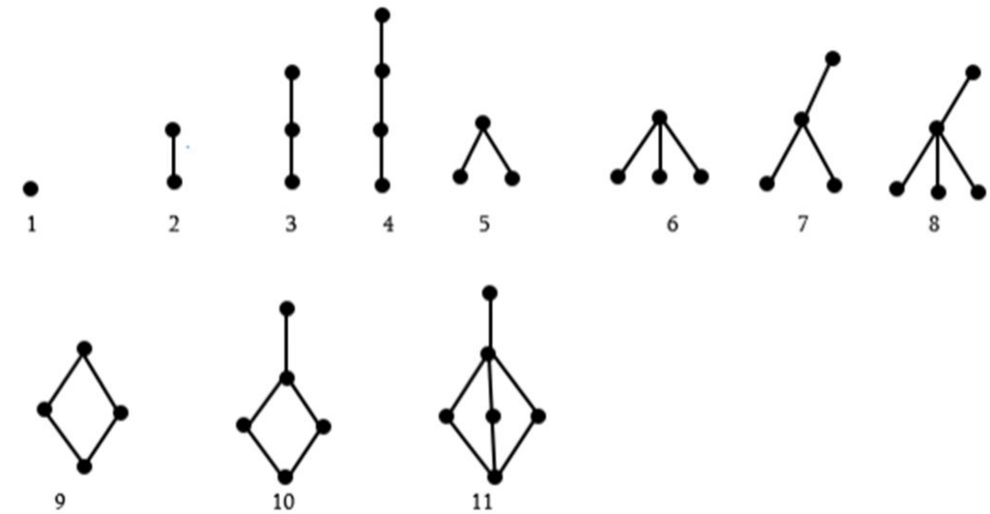
$$\begin{aligned}
&\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \\
&\left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1\right\}, \\
&\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}
\end{aligned}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ზემოთ მოცემული ქვესიმრავლეებიდან ბოლო 1 ქვესიმრავლე D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერს არ წარმოადგენს.

D ნახევარმესერის ექვსელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობა არის $C_6^6 = 1$. ეს ქვესიმრავლეა: $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

და ის არის ქვესიმრავლე D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერი

დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს, რომ ქვემოთ მოცემული დიაგრამები D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს ამოწურავს.



ნახ. 3.2

ახლა ამოვწეროთ D ნახევარმესერის ყველა ის ქვენახევარმესერები, რომლებიც არიან XI ქვენახევარმესერები.

ლემა 3.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. მაშინ ნახ. 2-ზე ნაჩვენები 5-11 დიაგ-რამებით განსაზღვრული არცერთი ქვენახევარმესერი არ წარმოადგენს $XI-$ნახევარმესერს.

დამტკიცება: მოცემული ლემა დავამტკიცოთ ნახაზი 2-ის 5,6,7,8,11 დიაგრამებით განსაზღვრული ნახევარმესერებიდან ერთ-ერთი ნახევარმესერისთვის, მაგალითად ვაჩვენოთ, რომ 11-ე დიაგრამით განსაზღვრული ნახევარმესერი არ წარმოადგენს $XI-$ნახევარმესერს, დანარჩენი შემთხვევები დამტკიცდება ანალოგიურად.

ვთქვათ $D'=\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ და $C(D')=\left\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\right\}$ არის სიმრავლეთა ოჯახი, სადაც $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ არიან X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები და

$$\psi=\begin{pmatrix} \breve{D} & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

არის ასახვა D' ნახევარმესერისა $C(D')$ სიმრავლეში, მაშინ მოცემული D' (იხ. ნახაზი 1) ნახევარმესერის ელემენტებისათვის ფორმალურ ტოლობებს ექნებათ შემდეგი სახე: იხილით (1.3)

სადაც P_1, P_2, P_3, P_4, ელემენტები წარმოადგენენ D ნახევარმესერის ბაზისურ წყაროებს, ხოლო P_0, P_5-სისავსის წყაროებს, ამიტომ $|X| \geq 4$ და $\delta = 4$ მაშინ ფორმალური ტოლობებიდან გვექნება:

$$D'_t = \begin{cases} \{\breve{D},\ Z_1\ ,Z_2\ ,Z_3\ ,Z_4\ ,Z_5\} & if\ \ t \in P_0, \\ \{\breve{D}\}, & if\ \ t \in P_1, \\ \{Z_1, Z_3, Z_4, \breve{D}\}, & if\ \ t \in P_2, \\ \{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, & if\ \ t \in P_3, \\ \{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, & if\ \ t \in P_4, \\ \{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}, & if\ \ t \in P_5, \end{cases} \qquad \wedge(D', D'_t) = \begin{cases} Z_5,\ if & t \in P_0, \\ \breve{D},\ if & t \in P_1, \\ Z_5,\ if & t \in P_2 \\ Z_5, \ \ if & t \in P_3 \\ Z_5, \ \ if & t \in P_4. \\ Z_5, \ \ if & t \in P_5 \end{cases}$$

მივიღეთ, რომ $D'^{\wedge} = \left\{\wedge(D', D'_t) \middle| t \in \breve{D}\right\} = \{Z_1\}$ და $\wedge(D', D'_t) \notin D'$, რადგანაც P_1, P_2, P_3, P_4, არის ბაზისური წყარო. ამიტომ განმარტება 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ D'

შესრულდა პრველი პირობა და არ შესრულდა მეორე. ე. ი არ არის $XI-$ნახევარმესერი

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ ნახ. 2-ზე ნაჩვენები 56,7,8,11 დიაგრამებით განსაზღვრული არცერთი ქვენახევარმესერი არ წარმოადგენს $XI-$ქვენახევარმესერს.

ლემა დამტკიცებულია.

ახლა აღვწეროთ $\Sigma_2(X,8)$ კლასის ყველა XI-ქვენახევარმესერი.

ლემა 3.4 ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$და $Z_7 \neq \varnothing$. მაშინ შემდეგი სიმრავლეებით ამოიწურებიან D ნახევარმესერის ყველა $XI-$ქვენახევარმესერი:

1) $\{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}$; (იხ.დიაგრამა 1 ნახაზი 3.4-ზე);

2) $\begin{matrix}\{Z_5, Z_4\}, \{Z_5, Z_3\}, \{Z_5, Z_2\}, \{Z_5, Z_1\}, \{Z_5, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1\}, \\ \{Z_4, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1\}, \{Z_3, \breve{D}\}, \{Z_2, Z_1\}, \{Z_2, \breve{D}\}, \{Z_1, \breve{D}\};\end{matrix}$ (იხ.დიაგრამა 2 ნახაზი 3.4-ზე);

3) $\begin{matrix}\{Z_5, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, Z_1\}, \\ \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_5, Z_2, Z_1\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_2, Z_1, \breve{D}\};\end{matrix}$ (იხ.დიაგრამა 3 ნახაზი 3.4-ზე);

4) $\left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$ (იხ.დიაგრამა 4 ნახაზი 3.4-ზე);

5) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1\right\}$. (იხ.დიაგრამა 5 ნახაზი 3.4-ზე);

6) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$. (იხ.დიაგრამა 6 ნახაზი 3.4-ზე);

დამტკიცება: მოცემული ლემის 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.11-დან, 5-6 პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.12-დან.

3. $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდეპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5 \neq \varnothing$

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები და აღწერილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები. განხილულია ის შემთხვევა, როცა X სასრულო სიმრავლეა და $Z_5 \neq \varnothing$. გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_{20}(X,6)$. Q_i $(i = 1,2,3,\dots,6)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

1) $Q_1 = \{T\}$, სადაც $T \in D$ (იხ. დიაგრამა 1 ნახაზი 3.4-ზე)

2) $Q_2 = \{T, T'\}$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$; (იხ. დიაგრამა 2 ნახაზი 3.4-ზე)

3) $Q_3 = \{T, T', T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$; (იხ. დიაგრამა 3 ნახაზი 3.4-ზე)

4) $Q_4 = \{T, T', T'', T'''\}$, სადაც $T, T', T'', T''' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset T'''$,

(იხ. დიაგრამა 4 ნახაზი 3.4-ზე)

5) $Q_5 = \{T, T', T'', T' \cup T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$

(იხ. დიაგრამა 6 ნახაზი 3.4-ზე)

6) $Q_6 = \{T, T', T'', T' \cup T'', T'''\}$, სადაც $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \cup T'' \subset T'''$ (იხ. დიაგრამა 10 ნახაზი 3.4-ზე)

თეორემა 4.1. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X, 6)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T'''}^\alpha \times T''')$, სადაც $T, T', T'', T''' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset T'''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha \cap T''' \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T''))$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T'$ $T \subset T''$ $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

6) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')) \cup (Y_{T'''}^\alpha \times T''')$, სადაც $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \cup T'' \subset T'''$ $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha \cap T''' \neq \varnothing$;

დამტკიცება: $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის D ნახევარმესერების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნახაზი 3.4-ზე მოცემული დიაგრამები D ნახევარმესერის ყველა XI-ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს ამოწურავს. $\mathrm{B}_{\mathrm{X}}(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც განსაზღვრულია მოცემული XI-ნახევარმესერებით და $Z \neq \varnothing$ პირობას აკმაყოფილებენ, შეიძლება ჰქონდეთ ზემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.1-დან, 5) -6) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.3-დან.

ლემა 4.1. თუ X სასრულო სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1) $\left|\mathrm{I}(Q_1)\right| = 6$;

2) $\left|\mathrm{I}(Q_2)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus T'|}$;

3) $\left|\mathrm{I}(Q_3)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T''\setminus T'|}-2^{|T''\setminus T'|}\right)\cdot 3^{|X\setminus T''|}$;

4) $\left|\mathrm{I}(Q_4)\right| = \left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T''\setminus T'|}-2^{|T''\setminus T'|}\right)\cdot\left(4^{|T'''\setminus T''|}-3^{|T'''\setminus T''|}\right)\cdot 4^{|X\setminus T'''|}$;

5) $\left|\mathrm{I}(Q_5)\right| = \left(2^{|T'\setminus T''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T'|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(T'\cup T'')|}$;

6) $\left|\mathrm{I}(Q_6)\right| = \left(2^{|T'\setminus T''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(5^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}-4^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}\right)\cdot 5^{|X\setminus T'''|}$;

დამტკიცება: $1)-4)$ ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.2-დან, $5)-6)$ ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი 1.4-დან,

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7 \neq \varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*(Q_1)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით $\left|I^*(Q_1)\right| = 6$.

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_1\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\right\}.$$

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D'_1=\{Z_5\},D'_2=\{Z_4\},D'_3=\{Z_3\},D'_4=\{Z_2\},D'_5=\{Z_1\},D'_6=\{\breve{D}\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*(Q_1)\right|=\left|I(D'_1)\right|+\left|I(D'_2)\right|+\left|I(D'_3)\right|+\left|I(D'_4)\right|+\left|I(D'_5)\right|+\left|I(D'_6)\right|$$

(იხ თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის a) პირობას მივიღებთ, რომ

$$\left|I^*(Q_1)\right|=1+1+1+1+1+1=6$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*(Q_2)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_2)\right|=&\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_5|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_3|}+\\&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_1|}\quad+\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus Z_1|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned}Q_2\vartheta_{XI}=\{&\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4\},\\&\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_3,Z_1\},\{Z_2,Z_1\}\}\end{aligned}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}&D'_1=\{Z_5,\breve{D}\},\ D'_2=\{Z_4,\breve{D}\},\ D'_3=\{Z_3,\breve{D}\},\ D'_4=\{Z_2,\breve{D}\},\ D'_5=\{Z_1,\breve{D}\},\ D'_6=\{Z_5,Z_4\},\\&D'_7=\{Z_5,Z_1\},D'_8=\{Z_5,Z_3\},D'_9=\{Z_5,Z_2\},D'_{10}=\{Z_4,Z_1\},D'_{11}=\{Z_3,Z_1\},D'_{12}=\{Z_2,Z_1\}\end{aligned}$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_2\right)\right| = & \left|I\left(D_1'\right)\right| + \left|I\left(D_2'\right)\right| + \left|I\left(D_3'\right)\right| + \left|I\left(D_4'\right)\right| + \left|I\left(D_5'\right)\right| + \left|I\left(D_6'\right)\right| + \\ & + \left|I\left(D_7'\right)\right| + \left|I\left(D_8'\right)\right| + \left|I\left(D_9'\right)\right| + \left|I\left(D_{10}'\right)\right| + \left|I\left(D_{11}'\right)\right| + \left|I\left(D_{12}'\right)\right|\end{aligned}$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის b) პირობას მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_2\right)\right| = & \left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + \\ & + \left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_5|} + \left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|} + \\ & + \left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.4. . ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$და $Z_7\neq\varnothing$.თუ X არის სასრული სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*\left(Q_3\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_3\right)\right| = & \left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\ & + \left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\ & + \left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \\ & + \left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \\ & + \left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|} + \left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$\begin{aligned}Q_3\vartheta_{XI} = & \left\{\left\{Z_5,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\right. \\ & \left\{Z_5,Z_4,Z_1\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_1\right\},\left\{Z_5,Z_2,Z_1\right\}, \\ & \left.\left\{Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}\end{aligned}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}& D_1'=\left\{Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\quad D_2'=\left\{Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\quad D_3'=\left\{Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\quad D_4'=\left\{Z_5,Z_4,D\right\}, \\ & D_5'=\left\{Z_5,Z_3,Z_1\right\},\quad D_6'=\left\{Z_5,Z_4,Z_1\right\},\quad D_7'=\left\{Z_5,Z_2,Z_1\right\},\quad D_8'=\left\{Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}, \\ & D_9'=\left\{Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\quad D_{10}'=\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\end{aligned}$$

მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_3\right)\right|=\left|I\left(D_1'\right)\right|+\left|I\left(D_2'\right)\right|+\left|I\left(D_3'\right)\right|+\left|I\left(D_4'\right)\right|+\left|I\left(D_5'\right)\right|+ \\ +\left|I\left(D_6'\right)\right|+\left|I\left(D_7'\right)\right|+\left|I\left(D_8'\right)\right|+\left|I\left(D_9'\right)\right|+\left|I\left(D_{10}'\right)\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის c) პირობას მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_3\right)\right|=&\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*\left(Q_4\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_4\right)\right|=&+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს,რომ

$Q_4\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{Z_5,Z_3,Z_1,D\right\},\ \left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$ შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},D_2'=\left\{Z_5,Z_3,Z_1,D\right\},D_3'=\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_4\right)\right|=\left|I\left(D_1'\right)\right|+\left|I\left(D_2'\right)\right|+\left|I\left(D_3'\right)\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის d) პირობას მივიღებთ,რომ

$$\left|I^*(Q_4)\right| = +\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა4.6. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7\neq\varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*(Q_5)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\left|I^*(Q_5)\right| = +\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს,რომ

$$Q_5\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},\right.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\ \ D_2' = \{Z_5,Z_4,Z_2,Z_4\},\ D_3' = \{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*(Q_6)\right| = \left|I(D_1')\right| + \left|I(D_2')\right| + \left|I(D_3')\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის f) პირობას მივიღებთ,რომ

$$\left|I^*(Q_5)\right| = \left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.11. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე მაშინ $\left|I^*(Q_6)\right|$ -ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_6)\right| = &\left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_6\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ \ \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\right.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},\ \ D_2' = \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, D_3' = \left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*(Q_6)\right| = \left|I(D_1')\right| + \left|I(D_2')\right| + \left|I(D_3')\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის j) პირობას მივიღებთ,რომ

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_6)\right| = &\left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{|Z_4 \setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+\\ &+\left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე და $I(D)$ არის ყველა იდემპოტენტების სიმრავლე, მაშინ მათი რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$\left|I(D)\right| = \left|I^*(Q_1)\right| + \left|I^*(Q_2)\right| + \left|I^*(Q_3)\right| + \left|I^*(Q_4)\right| + \left|I^*(Q_5)\right| + \left|I^*(Q_6)\right|$$

დამტკიცება.მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.7-ის c) პირობიდან.

თეორემა დამტკიცებულია.

4. $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდეპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5 = \varnothing$

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები და აღწერილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები. განხილულია ის შემთხვევა, როცა X სასრულო სიმრავლეა და $Z_5 = \varnothing$. გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა.

ვთქვათ $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_{20}(X,6)$. Q_i $(i = 1,2,3,\ldots,6)$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

1) $Q_1 = \{\varnothing\}$, სადაც $T \in D$ (იხ. დიაგრამა 1 ნახაზი 3.4-ზე)

2) $Q_2 = \{\varnothing, T'\}$, სადაც $T, T' \in D$, $T \subset T'$; (იხ. დიაგრამა 2 ნახაზი 3.4-ზე)

3) $Q_3 = \{\varnothing, T', T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$; (იხ. დიაგრამა 3 ნახაზი 3.4-ზე)

4) $Q_4 = \{\varnothing, T', T'', T'''\}$, სადაც $T, T', T'', T''' \in D$, $T \subset T' \subset T'' \subset T'''$,

(იხ. დიაგრამა 4 ნახაზი 3.4-ზე)

5) $Q_5=\{\varnothing,T',T'',T'\cup T''\}$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$

(იხ. დიაგრამა 6 ნახაზი 3.4-ზე)

6) $Q_6=\{\varnothing,T',T'',T'\cup T'',T'''\}$, სადაც $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\cup T''\subset T'''$ (იხ. დიაგრამა 10 ნახაზი 3.4-ზე)

თეორემა 4.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ და $\alpha\in B_X(D)$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha=\varnothing$, სადაც $T\in D$;

2) $\alpha=(Y_7^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$, სადაც $\varnothing\neq T'\in D$, $Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=(Y_7^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')$, სადაც $\varnothing\neq T'\subset T''\in\breve{D}$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

4) $\alpha=(Y_7^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')\cup(Y_{T'''}^\alpha\times T''')$, სადაც $\varnothing\neq T'\subset T''\subset T'''\in D$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha\cap T'''\neq\varnothing$;

5) $\alpha=(Y_7^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')\cup(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times(T'\cup T''))$, სადაც $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

6) $\alpha = \left(Y_5^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times \left(T' \cup T''\right)\right) \cup \left(Y_{T'''}^\alpha \times T'''\right)$, სადაც $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \cup T'' \subset T'''$ $Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_7^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha \cap T''' \neq \varnothing$;

დამტკიცება: $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის D ნახევარმესერების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნახაზი 3.4-ზე მოცემული დიაგრამები D ნახევარმესერის ყველა XI -ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს ამოწურავს. $\mathrm{B}_\mathrm{X}(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც განსაზღვრულია მოცემული XI -ნახევარმესერებით და $\mathrm{Z} \neq \varnothing$ პირობას აკმაყოფილებენ, შეიძლება ჰქონდეთ ზემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.1-დან, 5) -6) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.3-დან.

ლემა 4.1. თუ X სასრულო სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1) $\left|\mathrm{I}(Q_1)\right| = 1$;

2) $\left|\mathrm{I}(Q_2)\right| = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus T'|}$;

3) $\left|\mathrm{I}(Q_3)\right| = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}\right) \cdot 3^{|X \setminus T''|}$;

4) $\left|\mathrm{I}(Q_4)\right| = \left(2^{|T' \setminus T|} - 1\right) \cdot \left(3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}\right) \cdot \left(4^{|T''' \setminus T''|} - 3^{|T''' \setminus T''|}\right) \cdot 4^{|X \setminus T'''|}$;

5) $\left|\mathrm{I}(Q_5)\right| = \left(2^{|T' \setminus T''|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T'' \setminus T'|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus (T' \cup T'')|}$;

6) $\left|\mathrm{I}(Q_6)\right| = \left(2^{|T' \setminus T''|} - 1\right) \cdot \left(2^{|T'' \setminus T'|} - 1\right) \cdot \left(5^{|T''' \setminus (T' \cup T'')|} - 4^{|T''' \setminus (T' \cup T'')|}\right) \cdot 5^{|X \setminus T'''|}$;

დამტკიცება: 1)– 4) ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი1.2-დან, 5)–6) ტოლობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი 1.4-დან,

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$და $Z_7\neq\varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*\left(Q_1\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით $\left|I^*\left(Q_1\right)\right|=1$.

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Q_1\vartheta_{XI}=\left\{\varnothing\right\}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $D_1'=\left\{\varnothing\right\}$ მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_1\right)\right|=\left|I\left(D_1'\right)\right|=1$$

(იხ თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .5.1-ის a) პირობას მივიღებთ, რომ $\left|I^*\left(Q_1\right)\right|=1$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*\left(Q_2\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*\left(Q_2\right)\right|=&\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\&+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_2\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_4\right\},\left\{\varnothing,Z_1\right\},\left\{\varnothing,Z_3\right\},\left\{\varnothing,Z_2\right\}\right\}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}&D_1'=\left\{\varnothing,\breve{D}\right\},\ \ D_2'=\left\{\varnothing,Z_4\right\},\\&D_3'=\left\{\varnothing,Z_1\right\},D_4'=\left\{\varnothing,Z_3\right\},D_5'=\left\{\varnothing,Z_2\right\},\end{aligned}$$

მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_2\right)\right|=\left|I\left(D_1'\right)\right|+\left|I\left(D_2'\right)\right|+\left|I\left(D_3'\right)\right|+\left|I\left(D_4'\right)\right|+\left|I\left(D_5'\right)\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის b) პირობას მივიღებთ, რომ

$$\left|I^*\left(Q_2\right)\right| = \left(2^{\left|\breve{D}\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} + \left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_4\right|} + \left(2^{\left|Z_1\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_1\right|} +$$
$$+\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_3\right|} + \left(2^{\left|Z_2\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_2\right|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.4. . ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$ და $Z_7\neq\varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*\left(Q_3\right)\right|$ -ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით

$$\left|I^*\left(Q_3\right)\right| = \left(2^{\left|Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} + \left(2^{\left|Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} +$$
$$+\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} + \left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|} +$$
$$+\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|} + \left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|} +$$
$$+\left(2^{\left|Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_3\vartheta_{XI} = \left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\},$$
$$\left\{\varnothing, Z_4, Z_1\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_1\right\}, \left\{\varnothing, Z_2, Z_1\right\},$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\},\quad D_2' = \left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\},\quad D_3' = \left\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\right\},\quad D_4' = \left\{\varnothing, Z_4, D\right\},$$
$$D_5' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_1\right\},\quad D_6' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_1\right\},\quad D_7' = \left\{\varnothing, Z_2, Z_1\right\}$$

მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_3\right)\right| = \left|I\left(D_1'\right)\right| + \left|I\left(D_2'\right)\right| + \left|I\left(D_3'\right)\right| + \left|I\left(D_4'\right)\right| + \left|I\left(D_5'\right)\right| +$$
$$+\left|I\left(D_6'\right)\right| + \left|I\left(D_7'\right)\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის c) პირობას მივიღებთ, რომ

$$
\begin{aligned}
\left|I^{*}\left(Q_{3}\right)\right| = & \left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+ \\
& +\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^{*}\left(Q_{4}\right)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$
\begin{aligned}
\left|I^{*}\left(Q_{4}\right)\right| = & \left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს,რომ

$Q_4\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_3,Z_1,D\right\},\ \left\{\varnothing,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$ შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$D_1'=\left\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},D_2'=\left\{\varnothing,Z_3,Z_1,D\right\},D_3'=\left\{\varnothing,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},$

მივიღებთ

$\left|I^{*}\left(Q_{4}\right)\right|=\left|I\left(D_1'\right)\right|+\left|I\left(D_2'\right)\right|+\left|I\left(D_3'\right)\right|$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის d) პირობას მივიღებთ,რომ

$$
\begin{aligned}
\left|I^{*}\left(Q_{4}\right)\right| = & \left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა4.6. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$და $Z_7 \neq \varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე, მაშინ $\left|I^*(Q_5)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_5)\right| = &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს,რომ

$$Q_5\vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_1\}, \{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1\}, \ \{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1\},\right.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_1\}, \ \ D_2' = \{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_4\}, \ D_3' = \{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*(Q_6)\right| = \left|I(D_1')\right| + \left|I(D_2')\right| + \left|I(D_3')\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის f) პირობას მივიღებთ,რომ

$$\begin{aligned}\left|I^*(Q_5)\right| = &\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\ &+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 4.11. ვთქვათ $D \in \Sigma_{20}(X,6)$და $Z_7 \neq \varnothing$.თუ X არის სასრულო სიმრავლე მაშინ $\left|I^*(Q_6)\right|$-ის სიმძლავრე გამოითვლება ფორმულით

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ + \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ + \left(2^{\left|Z_2 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

დამტკიცება: D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ

$$Q_6 \vartheta_{XI} = \left\{\left\{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \quad \left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\right.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \;\; D_2' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, D_3' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$

მივიღებთ

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left|I\left(D_1'\right)\right| + \left|I\left(D_2'\right)\right| + \left|I\left(D_3'\right)\right|$$

(იხ. თეორემა 1.7). თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას და ლემა .4.1-ის j) პირობას მივიღებთ,რომ

$$\left|I^*\left(Q_6\right)\right| = \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ + \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ + \left(2^{\left|Z_2 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4.2. ვთქვათ $D \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. თუ X არის სასრულო სიმრავლე და $I\left(D\right)$ არის ყველა იდემპოტენტების სიმრავლე, მაშინ მათი რაოდენობის გამოსათვლელ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$\left|I(D)\right| = \left|I^*(Q_1)\right| + \left|I^*(Q_2)\right| + \left|I^*(Q_3)\right| + \left|I^*(Q_4)\right| + \left|I^*(Q_5)\right| + \left|I^*(Q_6)\right|$$

დამტკიცება.მოცემული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.7-ის c) პირობიდან.

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.1. ვთქვათ $X = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$P_0 = \{\varnothing\},\ P_1 = \{1\},\ P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\},\ P_4 = \{4\},\ P_5 = \{0\}, ,$$

მაშინ $Z_1 = \{2,3,4,\}$, $Z_2 = \{3,4,\}$, $Z_3 = \{2,4,\}$, $Z_4 = \{2,3\}$, და

$$D = \{\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4,\},.$$

გამომდინარე აქედან $\left|I^*(Q_1)\right| = 6$, $\left|I^*(Q_2)\right| = 65$, $\left|I^*(Q_3)\right| = 79$, $\left|I^*(Q_4)\right| = 9$, $\left|I^*(Q_5)\right| = 6$, $\left|I^*(Q_6)\right| = 3$ $\left|I_D\right| = 168$ (იხ. დამატება 1).

6. $\sum_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფები

ამ პარაგრაფში მოცემულია $\sum_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების მაქსიმალური ქვეჯგუფების სრული აღწერა.

$G_X(D,\varepsilon)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფი, რომლის ერთეული არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება. გამომდინარე აქედან შევნიშნოთ, რომ თუ ნახევარჯგუფს იდემპოტენტური ელემენტი არ გააჩნია, მაშინ ამ ნახევარჯგუფს ქვეჯგუფიც არ გააჩნია.

თეორემა 6.1. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε ბინარული მიმართებისათვის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D,\varepsilon)$ ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არის ერთის, ორის ან ოთხის ტოლი.

დამტკიცება. ვთქვათ ε არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ბინარული მიმართება. ახლა, თუ $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ყველა სრულ ავტომორფიზმთა ჯგუფს Φ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, მაშინ 6.1 თეორემის თანახმად გვექნება, რომ $G_X(D,\varepsilon)$ და Φ ჯგუფები ანტიიზომორფულია.

მოცემული თეორემის დასამტკიცებლად ε ბინარული მიმართების მიმართ განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) თუ ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 4.1-ის და თეორემა 5.1-ის 1), 2), 3), 4) პირობებს, მაშინ $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის დიაგრამებს შესაბამისად ექნებათ ნახაზი 3.4-ის 1, 2, 3, 4, სახე. ამიტომ ამ შემთხვევაში $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რიცხვი ტოლი იქნება ერთის (იხ. ლემა6.1). ახლა თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 6.1-ს, ჩვენ მივიღებთ, რომ $\left|G_X(D,\varepsilon)\right|=1$.

2) თუ ε იდემპოტენტური ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 4.1-ის და თეორემა 5.1-ის 5), 6) პირობებს, მაშინ $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის დიაგრამებს შესაბამისად ექნებათ ნახაზი 3.4-ის 5-6სახე. ამიტომ ამ შემთხვევაში $V(D,\varepsilon)$ ნახევარმესერის ავტომორფიზმთა რიცხვი ტოლი იქნება ორის (იხ. ლემა6.1). ახლა თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 6.1-ს, ჩვენ მივიღებთ, რომ. $\left|G_X(D,\varepsilon)\right|=2$.

რადგანაც ნახაზი 3.4-ის დიაგრამები ამოწურავს D ნახევარმესერის ყველა XI ქვენახევარმესერებს, ამიტომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ბინარული მიმართებები თეორემა 4.1-ის და თეორემა 5.1-ის $1)-16)$ პირობებით ამოიწურებიან. აქედან გამომდინარეობს, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ε იდემპოტენტური ბინარული

მიმართებისათვის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის $G_X(D,\varepsilon)$ ქვეჯგუფის რიგი ტოლია ერთის ან ორის

თეორემა დამტკიცებულია.

7. $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტები, როცა $Z_7 \neq \varnothing$

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია $\Sigma_{20}(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები და აღწერილია მათი რეგულარული ელემენტები. განხილულია ის შემთხვევა, როცა X სასრულო სიმრავლეა და $Z_7 \neq \varnothing$. გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების რაოდენობა.

თეორემა 7.1. ვთქვათ $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება არის მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ მოცემული პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = X\times T$, სადაც $T\in D$;

2) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$, სადაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_{T''}^\alpha\times T'')$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'''}^\alpha\times T'''\right)$, სადაც $T,T',T'',T'''\in D$, $T\subset T'\subset T''\subset T'''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha\cap T'''\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right)$, სადაც $T,T',T''\in D$, $T\subset T'$ $T\subset T''$ $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right)\cup\left(Y_{T'''}^\alpha\times T'''\right)$, სადაც $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\cup T''\subset T'''$ $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha\cap T'''\neq\varnothing$;

დამტკიცება: $\Sigma_{20}\left(X,6\right)$ კლასის D ნახევარმესერების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნახაზი 3.4-ზე მოცემული დიაგრამები D ნახევარმესერის ყველა ქვენახევარმესერთა დიაგრამებს ამოწურავს. $\mathrm{B}_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, რომლებიც განსაზღვრულია მოცემული XI ნახევარმესერებით და აკმაყოფილებს $Z\neq\varnothing$ პირობას, შეიძლება ჰქონდეს ზემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი. 1)-4) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.15-დან, 5)-6) პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა1.17-დან, 12)პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.19-დან,

ლემა 7.1. თუ X სასრულო სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1) $R^*(Q_1)=6$

2) $\left|R(Q)\right|=\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus T'|}$;

3) $\left|R\left(Q_3\right)\right|=\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T''\setminus T'|}-2^{|T''\setminus T'|}\right)\cdot 3^{|X\setminus T''|}$;

4) $\left|R\left(Q_4\right)\right|=\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T''\setminus T'|}-2^{|T''\setminus T'|}\right)\cdot\left(4^{|T'''\setminus T''|}-3^{|T'''\setminus T''|}\right)\cdot 4^{|X\setminus T'''|}$;

5) $\left|R(Q_5)\right| = 2\left(2^{|T'\setminus T''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T'|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(T'\cup T'')|}$;

6) $\left|R(Q_6)\right| = 2\left(2^{|T'\setminus T''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(5^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}-4^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}\right)\cdot 5^{|X\setminus T'''|}$

დამტკიცება: 1)-4)პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი 1.2-დან,4 5-6 პირობების სამართლიანობა გამომდინარეობს შედეგი 1.4-დან.

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$და $Z_7\neq\varnothing$ თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_1)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 1) პირობას, მაშინ

$$\left|R^*(Q_1)\right| = 6 .$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 1) პირობას, მაშინ მოცემული ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება შემდეგი სახე $\alpha = X\times T$ რომელიღაც $T\in D$ -სათვის. ადვილი დასანახია, რომ $\alpha\circ\alpha=\alpha$ ყველა $T\in D$ -სათვის. $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება არის რეგულარული ელემენტი, ამიტომაც $\left|R^*(Q_1)\right| = 6$.

ლემა დამტკიცებულია.

2) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 2) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_2=\{T,T'\}$, სადაც $T,T'\in D$ და $T\subset T'$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}Q_2\vartheta_{XI} = \{&\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4\},\\ &\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_3,Z_1\},\{Z_2,Z_1\}\}\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_2,Q_2)\right|=1$და $\left|\Omega(Q_2)\right|=23$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}&D_1'=\{Z_5,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_4,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_3,\breve{D}\},\ D_4'=\{Z_2,\breve{D}\},\ D_5'=\{Z_1,\breve{D}\},\ D_6'=\{Z_5,Z_4\},\\ &D_7'=\{Z_5,Z_1\},D_8'=\{Z_5,Z_3\},D_9'=\{Z_5,Z_2\},D_{10}'=\{Z_4,Z_1\},D_{11}'=\{Z_3,Z_1\},D_{12}'=\{Z_2,Z_1\}\end{aligned}$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}R^*(Q_2) = {}&R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup\\ &\cup R(D_7')\cup R(D_8')\cup R(D_9')\cup R(D_{10}')\cup R(D_{11}')\cup R(D_{12}')\end{aligned}\quad\ldots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$და $Z_5\neq\varnothing$. X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_2)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 2) პირობას, მაშინ

$$\left|R^*(Q_2)\right|=12\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha\in R(D_{12}')$. მაშინ α ბინარული მიმართების კვაზინორმალური წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$რომელიღაც $T,T'\in D, T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$-სათვის და თეორემა 7.1-ის 2) პირობის ძალით აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\supseteq Z_2$ და $Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_2\supseteq Z_5$ და $\breve{D}\supseteq Z_1$, რადგანაც Z_5 და $\breve{D}$ შესაბამისად წარმოადგენენ D ნახევარმესერის მინიმალურ და მაქსიმალურ ელემენტებს. ამრიგად $Y_T^\alpha\supseteq Z_5$ და $Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$. ბოლო ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha\in R(D_1')$. ამასთან სამართლიანია ჩართვა $R(D')\subseteq R(D_1')$, სადაც $D'\in\{D_2',D_3'......D_{12}'\}$. თუ გავითვალისწინებთ (1) ტოლობას მივიღებთ $R^*(Q_2)=R(D_1')$. ამასთან $\left|R^*(Q_2)\right|=\left|R(D_1')\right|$. მოცემული ტოლობით და ლემა 7.1-ს b) პირობის თანახმად გვექნება:

$$\left|R^*(Q_2)\right|=12\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

$c)$ ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 3) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_2=\{T,T',T''\}$, სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'\subset T''$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}Q_3\vartheta_{XI}=&\left\{Z_5,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\\&\left\{Z_5,Z_4,Z_1\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_1\right\},\left\{Z_5,Z_2,Z_1\right\},\\&\left\{Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\}\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_3,Q_3)\right|=1$ და $|\Omega(\quad)|=\quad$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D'_1=\left\{Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\quad D'_2=\left\{Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\quad D'_3=\left\{Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\quad D'_4=\left\{Z_5,Z_4,D\right\},$$
$$D'_5=\left\{Z_5,Z_3,Z_1\right\},\quad D'_6=\left\{Z_5,Z_4,Z_1\right\},\quad D'_7=\left\{Z_5,Z_2,Z_1\right\},\ D'_8=\left\{Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},$$
$$D'_9=\left\{Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\quad D'_{10}=\left\{Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}R^*(Q_2)=R(D'_1)\cup R(D'_2)\cup R(D'_3)\cup R(D'_4)\cup R(D'_5)\cup R(D'_6)\cup\\ \cup R(D'_7)\cup R(D'_8)\cup R(D'_9)\cup R(D'_{10})\end{aligned}\ \ldots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right|=\left|R(D'_1)\right|+\left|R(D'_2)\right|+\left|R(D'_3)\right|+\left|R(D'_4)\right|\\ +\left|R(D'_1)\cap R(D'_2)\right|-\left|R(D'_1)\cap R(D'_3)\right|-\left|R(D'_1)\cap R(D'_4)\right|\end{aligned}$$

დამტკიცება: დასაწყისისთვის ვაჩვენოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$R^*(Q_3)=R(D'_1)\cup R(D'_2)\cup R(D'_3)\cup R(D'_4)$$

ვთქვათ $D'=\{Z,Z',Z''\}$ $(Z\subset Z'\subset Z'')$ ნებისმიერი ელემენტია $Q_3\vartheta_{XI}$ სიმრავლიდან და $\alpha\in R(D')$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$ და თეორემა 7.1-ის 3) პირობების ძალით აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $Y_T^\alpha\supseteq Z$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap Z''\neq\varnothing$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს, რომ $Z_5\subseteq Z$ და $Z''\subseteq\breve{D}$, რადგანაც Z_5 და $\breve{D}$ შესაბამისად წარმოადგენენ D ნახევარმესერის მინიმალურ და მაქსიმალურ ელემენტებს, ამრიგად $Y_T^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ ტოლობები სამართლიანია. ბოლოო ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ $\alpha\in R(D'')$, ე.ი. $R(D')\subseteq R(D'')$ სადაც $D''=\left\{Z_5,Z',\breve{D}\right\}$.

აგრეთვე სამართლიანია შემდეგი ჩართვები:

$$\begin{aligned}&R(D'_5)\subseteq R(D'_3),\ R(D'_6)\subseteq R(D'_4),\ R(D'_7)\subseteq R(D'_2),\ R(D'_{10})\subseteq R(D'_1),\\ &R(D'_8)\subseteq R(D'_1),\ R(D'_9)\subseteq R(D'_1),\end{aligned}$$

აქედან და (1) ტოლობის თანახმად მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$R^*(Q_3)=R(D'_1)\cup R(D'_2)\cup R(D'_3)\cup R(D'_4)\ \ldots(2)$$

ვთქვათ $\alpha\in R(D'_3)\cap R(D'_2)$. მაშინ α ბინარული მიმართებისთვის სამართლიანია შემდეგი პირობები:

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$
$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

მოცემული პირობებიდან მივიღებთ , რომ სამართლიანია შემდეგი პირობები

$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$

ახლა ვთქვათ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_3')$ მაშინ

$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$
$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$
$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$

მოცემული პირობებიდან მივიღებთ , რომ სამართლიანია შემდეგი პირობები

$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$

ე.ი

$R(D_2') \cap R(D_3') = R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_3')$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$R(D_2') \cap R(D_4') = R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_4')$
$R(D_3') \cap R(D_4') = R(D_1') \cap R(D_3') \cap R(D_4')$
$R(D_2') \cap R(D_3') \cap R(D_4') = R(D_1') \cap R(D_2') \cap R(D_3') \cap R(D_4')$

მივიღეთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\left|R^*(Q_3)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right|$$
$$+\left|R(D_1') \cap R(D_2')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_4')\right|$$

ლემა 7.5. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y', \breve{D}\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1', \breve{D}\}$, სადაც $Y_1' \supset Y'$. თუ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$, რომელიღაც $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$ და $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ -სათვის, მაშინ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$, მაშინ თეორემა 7.1-ის 3) პირობის თანახმად სამართლიანი იქნება შემდეგი პირობები:

$$\begin{array}{l} Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y',\ Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing; \\ Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing. \end{array} \quad \ldots(1)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing, \quad \ldots(2)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად $Y_1' \supset Y'$.

მეორეს მხრივ, თუ სამართლიანია (2) პირობები, მაშინ სამართლაინია (1) პირობებიც, ე.ი $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.6. ვთქვათ, $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|=10\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{|X\setminus D|}$$
$$\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|=10\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{|X\setminus D|}.$$
$$\left|R(D_1')\cap R(D_2')\right|=10\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_2|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{|X\setminus D|}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ სადაც $D'=\{Z_5,Y',\breve{D}\},D''=\{Z_5,Y_1',\breve{D}\}$ და $Y_1'\supset Y'$ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right),$$

რომელიღაც $T,T',T''\in D,\ T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing.\ \ldots(1)$$

ახლაგანვმარტო f_α ასახვა X სიმრავლისა D სიმრავლეში შემდეგნაირად: $f_\alpha(t)=t\alpha$ ნებისმიერი $t\in X$. $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$ და $f_{3\alpha}$ ასახვები კი არიან f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად Z_5, $Y_1'\setminus Z_5$ $\breve{D}\setminus Y_1'$ და $X\setminus\breve{D}$ სიმრავლეებზე.დაშვების თანახმად მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება გვაძლევს X.

ახლა შევისწავლოთ $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ასახვების თვისებები:

1) ვთქვათ $t\in Z_5$. მაშინ (1) ტოლობების ძალით მივიღებთ $Z_5\subseteq Y_5^\alpha$. აქედან და $t\in Y_5^\alpha$ სიმრავლის განსაზღვრებიდან $t\alpha=Z_5$. ამგვარად $f_{0\alpha}(t)=Z_7$ ნებისმიერი $t\in Z_7$-სათვის.

2) ვთქვათ $t\in Y_1'\setminus Z_7$. მაშინ (1) ტოლობების ძალით მივიღებთ $t\in Y_1'\setminus Z_7\subseteq Y_1'\subseteq Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha$. აქედან და Y_7^α,Y_T^α სიმრავლებიის განსაზღვრებიდან $t\alpha\in\{Z_7,T\}$. ამგვარად $f_1(t)\in\{Z_7,T\}$ ნებისმიერი $t\in Y_1'\setminus Z_7$.

მეორეს მხრივ $Y_T^\alpha\cap Y'\neq\varnothing$, ამიტომაც $t_1\alpha=T$ რომელიღაც $t_1\in Y'$-სათვის. თუ $t_1\in Z_7$, მაშინ $t'\in Y_1\subseteq Y_7^\alpha$. აქედან და Y_7^α სიმრავლის განსაზღვრებიდან მივიღებთ $t_1\alpha=Z_7$. მაგრამ $t_1\alpha=Z_7$ ტოლობა ეწინააღმდეგება $t_1\alpha=T$ ტოლობას, რადგან $T\neq Z_7$. ამგვარად $f_1(t')=T$ რომელიღაც $t'\in Y'\setminus Z_7$.

3) ვთქვათ $t\in\breve{D}\setminus Y_1'$. მაშინ $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha=X$ ტოლობიდან მივიღებთ $t\in Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_0^\alpha$. აქედან და Y_7^α, Y_T^α ,Y_0^α სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ $t\alpha\in\{Z_7,T,\breve{D}\}$. ამგვარად $f_{2\alpha}(t)\in\{Z_7,T,\breve{D}\}$ ნებისმიერი $t\in\breve{D}\setminus Y_1'$ სათვის.

მეორეს მხრივ $Y_0^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing$, ე.ი. $t''\alpha = \breve{D}$ რომელიღაც $t'' \in \breve{D}$-სათვის.თუ $t'' \in Y_{1'}$, მაშინ $t'' \in Y_{1'} \subseteq Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha}$. აქედან მივიღებთ $t''\alpha \in \{Z_7, T\}$. ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t''\alpha = \breve{D}$ ტოლობას. ამრიგად $f_3(t'') = \breve{D}$ რომელიღაც $t'' \in \breve{D} \setminus Y_1'$ -სათვის.

4) ვთქვათ $t \in X \setminus \breve{D}$. მივიღებთ, რომ $t \in X \setminus \breve{D} \subseteq X = Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_0^{\alpha}$. აქედან და Y_7^{α}, Y_T^{α}, Y_0^{α} სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ ამგვარად $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_7, T, \breve{D}\}$, ნებისმიერი $t \in X \setminus \breve{D}$-სათვის.

მივიღეთ, რომ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული დალაგებული $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სიტემა. ახლა დავუშვათ, რომ

$$f_0 : Z_7 \to \{Z_7\}, \quad f_1 : Y_1' \setminus Z_7 \to \{Z_7, T\},$$

$$f_2 : \breve{D} \setminus Y_1' \to \{Z_7, T, \breve{D}\}, \quad f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{Z_7, T, \breve{D}\}$$

არიან ისეთი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

5) $f_0(t) = Z_7$, ნებისმიერი $t \in Z_7$-სათვის;

6) $f_1(t) \in \{Z_7, T\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Z_7$ და $f_1(t') = T$ რომელიღაც $t' \in Y' \setminus Z_7$ -სათვის;

7) $f_2(t) \in \{Z_7, T, \breve{D}\}$, ნებისმიერი $t \in \breve{D} \setminus Y_1'$ და $f_2(t'') = \breve{D}$ რომელიღაც $t'' \in \breve{D} \setminus Y_1'$ -სათვის;

8) $f_3(t) \in \{Z_7, T, \breve{D}\}$, ნებისმიერი $t \in X \setminus \breve{D}$-სათვის.

ახლა განვსაზღვროთ $f : X \to D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Z_7, \\ f_1(t), & t \in Y_1' \setminus Z_7, \\ f_2(t), & t \in \breve{D} \setminus Y_1', \\ f_3(t), & t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

შემდგომში დავუშვათ, რომ $\beta = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$, $Y_7^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = Z_7\}$, $Y_T^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = T\}$ და $Y_0^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = \breve{D}\}$.მაშინ β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\beta = (Y_7^{\beta} \times Z_7) \cup (Y_T^{\beta} \times T) \cup (Y_0^{\beta} \times \breve{D})$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^{\beta} \supseteq Z_7$, $Y_7^{\beta} \cup Y_T^{\beta} \supseteq Y_1'$, $Y_T^{\beta} \cap Y' \neq \varnothing$, $Y_0^{\beta} \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

მივიღეთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა $\beta \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარულ მიმართებასა და $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ დალაგებულ სისტემებს შორის. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარული მიმართებებს ეთანადება $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ლემა 1.1-ისა და ლემა 1.3-ის თანახმად $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლია: 1, $2^{\left|(Y_1'\setminus Z_7)\setminus(Y'\setminus Z_7)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus Z_7\right|}-1\right)$, $3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}$ და $3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$. ამრიგად რეგულარული ელემენტების რაოდენობა შეიძლება გამოვთავლოთ შემდეგნაირად. $2^{\left|(Y_1'\setminus Z_7)\setminus(Y'\setminus Z_7)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

გავითვალისწინოთ, რომრიცხვი $2^{\left|(Y_1'\setminus Z_7)\setminus(Y'\setminus Z_7)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$ არ არის დამოკიდებული D ნახევარმესერის $T\subset T'\subset T''$ $\left(T,T',T''\in D\right)$ ჯაჭვის არჩევაზე, რადგანაც D ნახევარმესერის ყველა განსხვავებული სამელემენტიანი ჯაჭვის რაოდენობა ტოლია 10-ის, ამიტომ $R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)$ სიმრავლის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე ნებისმიერი $T,T',T''\in D$-თვის, სადაც $T\subset T'\subset T''$, ტოლი იქნება

$$\left|R\left(D'\right)\cap R\left(D''\right)\right|=10\cdot 2^{\left|Y_1'\setminus(Y'\cup Z_5)\right|}\cdot\left(2^{\left|Y'\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Y_1'\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.7. ვთქვათ $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7\neq\varnothing$. $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_3\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 3) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_3\right)\right|&=10\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+10\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+10\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+10\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\
&-10\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus D\right|}\\
&-10\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus D\right|}\\
&-10\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus D\right|}
\end{aligned}$$

დამტკიცება: ლემა 7.4-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_3\right)\right|&=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|\\
&+\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\right|-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|
\end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ტოლობას, ლემა 7.6-ს და ლემა 7.1-ის 3) პირობას მივიღებთ ლემა 7.7 -ის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

$\mathbf{d}'$) ახლავთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 4) პირობას. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება: მოცემულ

შემთხვევაში $Q_4=\{T,T',T'',T'''\}$, სადაც $T,T',T'',T'''\in D$ და $T\subset T'\subset T''\subset T'''$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$Q_4\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{Z_5,Z_3,Z_1,D\right\},\ \left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_4,Q_4\right)\right|=1$ და $\left|\Omega(\quad)\right|=$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},D_2'=\left\{Z_5,Z_3,Z_1,D\right\},D_3'=\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},.$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$R^*(Q_4)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\ldots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.8. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|$$

დამტკიცება:

ვთქვათ $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')$. მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი პირობები:

$$\begin{array}{l}
Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1,\\
Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,\\
Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1,\\
Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,
\end{array}$$

ბოლოო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4\cup Z_3=Z_1$ და $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1\cap Y_{T''}^\alpha\neq\varnothing$. მაგრამ $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_{T''}^\alpha\neq\varnothing$ ტოლობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, ე.ი. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_2')$. ანალოგიურად დამტკიცდება აგრეთვე შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$R(D_1')\cap R(D_2')=\varnothing,\ R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing,\ R(D_2')\cap R(D_2')=\varnothing,$$

ამრიგად სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.11. ვთქვათ $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_4)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 4) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_4)\right| = {} & 3\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & +3\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ & +3\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{\|Z_1\setminus Z_2\|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\end{aligned}$$

დამტკიცება: თუ გავითვალისწინებთ ლემა 7.8 -ს, მივიღებთ

$$\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right|$$

აქედან,ლემა 7.10-ის და ლემა 7.1-ის 4) პირობის თანახმად მივიღებთ მოცემული ლემის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

f′) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 6) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_5=\{T,T',T'',T'\cup T''\}$, სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება:

$Q_5\vartheta_{XI}=\{\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_5,Q_5)\right|=2$ და $\left|\Omega(Q_6)\right|=3$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\ D_2'=\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1\},\ D_3'=\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$R^*(Q_6)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\ \ldots(1)$$

(იხ.განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.14. ვთქვათ $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა, მაშინ

$$\left|R^*(Q_6)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right|$$

დამტკიცება: დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა :

$(\quad ')\cap\ (\quad ')=\varnothing;$ $\qquad\qquad\ldots(3)$

ვთქვათ $\alpha\in\ (\quad ')\cap\ (\quad ')$ მაშინ სამართლიანია შემდეგი პირობები:

$$\begin{aligned}&Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_3, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\\ &Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\end{aligned}$$

აქედან მივიღებთ $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1,$ ე.ი $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\right)\neq\varnothing$ რაც ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ,ამიტომ $(\quad ')\cap\ (\quad ')=\varnothing$ და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $\left|R^*(Q_6)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right|$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.15. ვთქვათ $D' = \{Z_5, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ და $D'' = \{Z_5, Y, Y', Y \cup Y'\}$ არიან ისეთი ელემენტები რომ $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T'))$, სადაც $T, T' \in D$, $Z_5 \subset T$, $Z_5 \subset T'$, $Y_5^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$. მაშინ $\alpha \in \ (\ ') \cap \ (\ '')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$.

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი პირობები:

$$\begin{matrix} Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing. \\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_T^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing \end{matrix} \ldots(1)$$

ბოლო პირობების და $Z \supseteq Y$, $Z' \supseteq Y'$ ჩართვების თანახამად მივიღებთ, რომ

$$Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing. \ldots(2)$$

მეორეს მხრივ, თუ სამართლიანია (2) პირობები, მაშინ აგრეთვე სამართლიანი იქნება (1) პირობებიც, რადგანაც $Y_T^\alpha \cap Y_1 \supseteq Y_T^\alpha \cap Y \neq \varnothing$ და $Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \supseteq Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.16. ვთქვათ $D' = \{Z_5, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ და $D'' = \{Z_5, Y, Y', Y \cup Y'\}$ არიან ისეთი ელემენტები რომ $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 6 \cdot 2^{|Y_1 \setminus (Y \cup Y_1')|} \cdot \left(2^{|Y \setminus Y_1'|} - 1\right) \cdot 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot \left(2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus (Y_1 \cup Y_1')|}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $D' = \{Z_5, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1'\}$ და $D'' = \{Z_5, Y, Y', Y \cup Y'\}$ არიან ისეთი ელემენტები რომ $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$ თუ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T \cup T'}^\alpha \times (T \cup T')),$$

სადაც $T, T' \in D$, $Z_5 \subset T$, $Z_5 \subset T'$, $Y_7^\alpha, Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და ლემა 7.15-ის თანახმად აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_T^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing. \ldots(1)$$

ახლა, განვმარტოთ f_α ასახვა X სიმრავლისა D სიმრავლეში შემდეგნაირად: $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$. $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, და $f_{3\alpha}$ ასახვები შესაბამისად არიან f_α ასახვის შეზღუდვები $Y_1 \cap Y_1'$, $Y_1 \setminus Y_1'$, $Y_1' \setminus Y_1$ და $X \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ სიმრავლეებზე. დაშვების თანახმად მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება გვაძლევს X.

ახლა შევისწავლოთ $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ასახვების თვისებები:

1) ვთქვათ $t \in Y_1 \cap Y_1'$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება. აქედან და Y_7^{α} სიმრავლის განსაზღვრებიდან მივიღებთ რომ $t\alpha = Z_5$. ამრიგად $f_{0\alpha}(t) = Z_5$ ნებისმიერი $t \in Y_1 \cap Y_1'$.

2) ვთქვათ $t \in Y_1 \setminus Y_1'$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1 \setminus Y_1' \subseteq Y_1 \subseteq Y_7^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha}$. აქედან და $Y_5^{\alpha}, Y_T^{\alpha}$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha \in \{Z_5, T\}$. ამრიგად $f_{1\alpha}(t) \in \{Z_5, T\}$ ნებისიერი $t \in Y_1 \cap Y_1'$.

მეორეს მხრივ $Y_T^{\alpha} \cap Y \neq \varnothing$ ე.ი. $t'\alpha = T$ რომელიღაც $t' \in Y$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t' \in Y_1'$, მივიღებთ $t' \in Y_1' \subseteq Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$. აქედან და $Y_5^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha}$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ $t'\alpha \in \{Z_5, T'\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t'\alpha = T$ ტოლობას, რადგანაც $T \neq Z_5$ და $T \neq T'$. ე.ი. $t' \in Y \setminus Y_1'$. ამგვარად $f_{1\alpha}(t') = T$ რომელიღაც $t' \in Y \setminus Y_1'$.

3) ვთქვათ $t \in Y_1' \setminus Y_1$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1' \setminus Y_1 \subseteq Y_1' \subseteq Y_7^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$. აქედან და $Y_5^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha}$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha \in \{Z_5, T'\}$. ე.ი. $f_{2\alpha}(t) \in \{Z_5, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$.

მეორეს მხრივ სამართლიანია ტოლობა $Y_{T'}^{\alpha} \cap Y' \neq \varnothing$, ამიტომაც $t''\alpha = T'$ რომელიღაც $t'' \in Y'$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t'' \in Y_1$, მაშინ $t'' \in Y_1 \subseteq Y_5^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha}$ პირობიდან გვექნება $t''\alpha \in \{Z_5, T\}$. მაგრამ ბოლო პირობა ეწინააღმდეგება $t''\alpha = T'$ ტოლობას, რადგანაც $T' \neq Z_5$ და $T' \neq T$ ე.ი. $t'' \in Y' \setminus Y_1$. ამგვარად $f_{2\alpha}(t'') = T'$ რომელიღაც $t'' \in Y' \setminus Y_1$.

4) ახლა ვთქვათ $t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1')$. მივიღებთ, რომ $t \in t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1') \subseteq Y_5^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_{T \cup T'}^{\alpha}$, ე.ი. $t\alpha \in \{Z_5, T, T', T \cup T'\}$ და $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_5, T, T', T \cup T'\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1')$.

მივიღეთ, რომ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული დალაგებული $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ სისტემა.

შემდგომში დავუშვათ, რომ

$f_0 : Y_1 \cap Y_1' \to \{Z_5\}$, $f_1 : Y_1 \setminus Y_1' \to \{Z_5, T\}$, $f_2 : Y_1' \setminus Y_1 \to \{Z_5, T'\}$,

$f_3 : X \setminus (Y_1 \cup Y_1') \to \{Z_5, T, T', T \cup T'\}$

არიან ისეთი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

5) $f_0(t) = Z_5$, ნებისმიერი $t \in Y_1 \cap Y_1'$;

6) $f_1(t) \in \{Z_5, T\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1 \setminus Y_1'$ და $f_1(t_1') = T$ რომელიღაც $t_1' \in Y \setminus Y_1'$;

7) $f_2(t) \in \{Z_5, T'\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$ და $f_2(t_2') = T'$ რომელიღაც $t_2' \in Y' \setminus Y_1$;

) $f_3(t) \in \{Z_5, T, T', T \cup T'\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus (Y_1 \cup Y_1')$.

ახლა განვსაზღვროთ $f : X \to D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t), & t\in Y_1\cap Y_1',\\ f_1(t), & t\in Y_1\setminus Y_1',\\ f_2(t), & t\in Y_1'\setminus Y_1,\\ f_3(t), & t\in X\setminus(Y_1\cup Y_1'). \end{cases}$$

შემდგომში დავუშვათ, რომ $\beta=\bigcup_{t\in X}(\{t\}\times f(t))$, $Y_7^\beta=\{t\in X \mid t\beta=Z_7\}$, $Y_T^\beta=\{t\in X \mid t\beta=T\}$, $Y_{T'}^\beta=\{t\in X \mid t\beta=T'\}$ და $Y_{T\cup T'}^\beta=\{t\in X \mid t\beta=T\cup T'\}$. მაშინ β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\beta=(Y_5^\beta\times Z_5)\cup(Y_T^\beta\times T)\cup(Y_{T'}^\beta\times T')\cup(Y_{T\cup T'}^\beta\times(T\cup T'))$$

და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_5^\beta\cup Y_T^\beta\supseteq Y_1,\ Y_5^\beta\cup Y_{T'}^\beta\supseteq Y_1',\ Y_T^\beta\cap Y\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\beta\cap Y'\neq\varnothing.$$

მივიღეთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა $\beta\in R(D')\cap R(D'')$ ბინარულ მიმართებასა და $(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha})$ დალაგებულ სისტემებს შორის. ცხადია, რომ განსხვავებულ ბინარული მიმართებებს ეთანადება $(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha})$ სახის განსხვავებული სისტემები.

ლემა 1.1-სა და ლემა 1.3-ის თანახმად $f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლია: $1,2^{|Y_1\setminus(Y\cup Y_1')|}\cdot\left(2^{|Y\setminus Y_1'|}-1\right)$, $2^{|Y_1'\setminus(Y'\setminus Y_1)|}\cdot\left(2^{|Y'\setminus Y_1|}-1\right)$ და $4^{|X\setminus(Y_1\cup Y_1')|}$. ამრიგად, რეგულარული ელემენტების რაოდენობა შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად. $2^{|Y_1\setminus(Y\cup Y_1')|}\cdot\left(2^{|Y\setminus Y_1'|}-1\right)\cdot 2^{|Y_1'\setminus(Y'\cup Y_1)|}\cdot\left(2^{|Y'\setminus Y_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(Y_1\cup Y_1')|}$.

შევნიშნოთ, რომ $2^{|Y_1\setminus(Y\cup Y_1')|}\cdot\left(2^{|Y\setminus Y_1'|}-1\right)\cdot 2^{|Y_1'\setminus(Y'\cup Y_1)|}\cdot\left(2^{|Y'\setminus Y_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(Y_1\cup Y_1')|}$ რიცხვი არ არის დამოკიდებული $T,T'\in D$ ელემენტების შერჩევაზე, სადაც $Z_7\subset T$, $Z_7\subset T'$, $T\setminus T'\neq\varnothing$ და $T'\setminus T\neq\varnothing$. რადგანაც D ნახევარმესერის ყველა ასეთ ქვენახევარმესერთა რიცხვი ტოლია 10-ის, ამიტომ $(\alpha\in R(D')\cap R(D''))$ სიმრავლის ყველა რეგულარულ ელემენტთა რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით

$$|R(D')\cap R(D'')|=6\cdot 2^{|Y_1\setminus(Y\cup Y_1')|}\cdot\left(2^{|Y\setminus Y_1'|}-1\right)\cdot 2^{|Y_1'\setminus(Y'\cup Y_1)|}\cdot\left(2^{|Y'\setminus Y_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus(Y_1\cup Y_1')|}.$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$|R(D_1')\cap R(D_2')|=6\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$|R(D_2')\cap R(D_3')|=6\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.17. ვთქვათ ვთქვათ $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_{20}\left(X,6\right)$ და $Z_5\neq\varnothing$ თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_6\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 6) პირობას, მაშინ

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=6\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\
+6\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_4\right|}-\\
-10\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|}-10\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus Z_1\right|}
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ლემა 7.14-ის ძალით სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$
\begin{aligned}
\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_7'\right)\right|=R\left(D_1'\right)+R\left(D_2'\right)+R\left(D_3'\right)\\
-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|
\end{aligned}
$$

აქედან, ლემა 7.16-ის და ლემა 7.1-ის $f)$ პირობის ძალით მივიღებთ მოცემული ლემის სამართლიანობას.

ლემა დამტკიცებულია.

$\mathbf{h}')$ ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 8) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_8=\left\{Z_7,T,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\left\{Z_7,Z_6\right\}$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად $Q_8\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$.

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_8,Q_8\right)\right|=2$ და $\left|\Omega\left(Q_8\right)\right|=2$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$
\begin{aligned}
D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_7,Z_6,Z_4,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\},\\
D_3'=\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_4'=\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_1,Z_2,\breve{D}\right\}.
\end{aligned}
$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$R^*\left(Q_8\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right). \qquad \ldots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.22. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_8\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 8) პირობას, მაშინ

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_8\right)\right|&=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|=\\
&=4\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}-2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}\right)\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\\
&\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+4\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}\right)\cdot\\
&\cdot 3^{\left|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha\in R\left(D'\right)_1\cap R\left(D_2'\right)$. მაშინ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარულ მიმართებას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$$

სადაც $Z_7\subset T\subset Z_4\subset Z$, $Z_7\subset T\subset Z_4\subset Z'$, $Z\cup Z'=\breve{D}$, $Z\setminus Z'\neq\varnothing$, $Z'\setminus Z\neq\varnothing$ $Y_8^\alpha,Y_T^\alpha,Y_4^\alpha,Y_Z^\alpha,Y_{Z'}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$
\begin{aligned}
&Y_7^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4,\\
&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_1,\\
&Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_7^\alpha\supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4,\\
&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_Z^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_2,\\
&Y_T^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_Z^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing;
\end{aligned}
$$

აქედან მივიღებთ, რომ $Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\supseteq Z_1\cup Z_2=\breve{D}$.ე.ი.$\left(Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha\right)\cap Y_Z^\alpha\neq\varnothing$. ბოლოო ტოლობა კი ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, ამიტომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $R\left(D'\right)_1\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing, R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing,$. (2)

ახლა ვთქვათ $\alpha\in R\left(D'\right)_1\cap R\left(D_3'\right)$. მაშინ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right)\cup\left(Y_{Z'}^\alpha\times Z'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$$

სადაც $Z_7 \subset T \subset Z_4 \subset Z$, $Z_7 \subset T \subset Z_4 \subset Z'$, $Z \cup Z' = \breve{D}$, $Z \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \setminus Z \neq \varnothing$ $Y_8^\alpha, Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{array}{l} Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, \\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_1, \\ Y_T^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Y_7^\alpha \supseteq Z_7,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4, \\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_Z^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Z_2, \\ Y_T^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{Z'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing; \end{array}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_5 \cup Z_5 = Z_4$.ე.ი. $\left(Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \right) \cap Y_4^\alpha \supseteq Z_4 \cap Y_4^\alpha \neq \varnothing$. ბოლო ტოლობა კი ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, ამიტომ $R\left(D'\right)_1 \cap R\left(D_3'\right) = \varnothing$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_4'\right) = \varnothing, R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_4'\right) = \varnothing,\ \ldots.(3)$

$(1)-(3)$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\left|R^*\left(Q_8\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right|.$$

ბოლო ტოლობიდან და ლემა 7.1-ის $h)$ პირობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\begin{aligned} \left|R^*\left(Q_8\right)\right| = 4 \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \\ \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + 4 \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_7|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულიია.

$\mathbf{i}'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 9) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება $Q_9 \vartheta_{XI} = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_9, Q_9\right)\right| = 2$ და $\left|\Omega\left(Q_9\right)\right| = 1$. შემოვიღოთ შედეგი აღნიშვნა: $D_1' = \left\{Z_7, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$, მაშინ $R^*\left(Q_9\right) = R\left(D_1'\right)$ ე.ი. $\left|R^*\left(Q_9\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right|$ და

ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 10) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{10}=\{T,T',T'',T'\cup T'',Z\}$, სადაც $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\cup T''=Z$. D ნახევარმესერის განმარტების ძალით გვექნება

$$Q_6\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ .$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_{10},Q_{10})\right|=2$ და $\left|\Omega(Q_{10})\right|=3$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$R^*(Q_{10})=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')$. …(1)

(იხ.განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.23. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_{20}(X,6)$ და $Z_5\neq\varnothing$, მაშინ

$$R^*(Q_{10})=\sum_{i=1}^{4}R(D_i')-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|$$

. **დამტკიცება**. ვთქვათ $D'=\{Z,Z',Z'',Z'\cup Z'',Z'''\}$ და $\alpha\in R(D')$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times(T'\cup T'')\right)\cup\left(Y_Z^\alpha\times Z\right),$$

სადაც $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\cup T''\subset Z$. $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_Z^\alpha\notin\{\varnothing\}$ და თეორემა 7.1-ის 10) პირობის ძალით აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z''$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap Z''\neq\varnothing$, $Y_Z^\alpha\cap Z'''\neq\varnothing$. აქედან მივიღებთ, რომ $Y_Z^\alpha\cap\breve{D}\supseteq Y_Z^\alpha\cap Z'''\neq\varnothing$, რადგანაც $\breve{D}$ არის D ნახევარმესერის მაქსიმალური ელემენტი. ამრიგად სამართლიანია შემდეგი ჩართვები:

$$R(D_7')\subseteq R(D_1'),\ R(D_9')\subseteq R(D_1'),\ R(D_8')\subseteq R(D_2'),$$
$$R(D_{10}')\subseteq R(D_2'),\ R(D_{11}')\subseteq R(D_5'),\ R(D_{12}')\subseteq R(D_6'),$$

ბოლო ჩართვებიდან და (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$R^*(Q_{10}) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5') \cup R(D_6') \ldots (2)$

ახლა დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$. მაშინ α ბინარული მიმართებისათვის სამართლიანი იქნება შემდეგი პირობები:

$$\begin{array}{l} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing; \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_Z^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing. \end{array}$$

ბოლო ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ $\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha\right) \cap \left(Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \supseteq Z_4 \cap Z_4 \neq \varnothing$. მიღებული ტოლობა კი ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას. ამრიგად სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$. ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$\left.\begin{array}{l} R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing,\ R(D_1') \cap R(D_4') = \varnothing, R(D_1') \cap R(D_5') = \varnothing, \\ R(D_1') \cap R(D_6') = \varnothing,\ \ R(D_2') \cap R(D_3') = \varnothing,\ R(D_2') \cap R(D_5') = \varnothing\ , \\ R(D_2') \cap R(D_6') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_4') = \varnothing,\ R(D_3') \cap R(D_6') = \varnothing, \\ R(D_4') \cap R(D_5') = \varnothing, R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing, \end{array}\right. \ldots (3)$$

(2) და (3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდგი ტოლობის სამართლიანობა

$$R^*(Q_{10}) = \sum_{i=1}^{4} R(D_i') - \left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_4')\right| - \left|R(D_3') \cap R(D_5')\right| - \left|R(D_4') \cap R(D_6')\right|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.24. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y', Y''\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_1''\}$, $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$, $Y_1'' \supseteq Y''$ და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{Z' \cup T'}^\alpha \times (Z' \cup T')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right)$$

სადაც $Z \subset Z'$, $Z \subset T'$, $Z' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus Z' \neq \varnothing$, $Z' \cup T' \subset T$, $Z, Z', T', T \in D$, $Y_{Z'}^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$.

მაშინ $\alpha \in\ \ (\ \ ') \cap\ \ (\ \ '')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_7^\alpha \supseteq Y_1 \cap Y_1',\ Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი პირობები:

$$\left.\begin{array}{l} Y_7^\alpha \supseteq Y \cap Y',\ Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y,\ Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y',\ Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing, \\ Y_7^\alpha \supseteq Y_1 \cap Y_1',\ Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{Z'}^\alpha \cap Y_1 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y_1'' \neq \varnothing. \end{array}\right. (1)$$

აქედან და $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$, $Y_1'' \supseteq Y''$ ჩართვებიდან მივიღებთ, რომ

$Y_7^\alpha \supseteq Y_1 \cap Y_1',\ Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing. \ldots(2)$

ახლა ვთქვათ სამართლიანია (2)პირობები,(1) მაშინ სამართლიანი იქნება (1)პირობებიც, რადგანაც $Y_1 \cap Y_1' \supseteq Y \cap Y'$, $Y_{T'}^\alpha \cap Y_1' \supseteq Y_{T'}^\alpha \cap Y'$ და $Y_T^\alpha \cap Y_1'' \supseteq Y_T^\alpha \cap Y''$.

ლემა დამტკიცებულია

ლემა 7.25. ვთქვათ $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y', Y''\}$ და $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_1''\}$, სადაც $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $Y_1' \supseteq Y'$, $Y_1'' \supseteq Y''$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 6 \cdot 2^{\left|Y_1 \setminus (Y \cup Y_1')\right|} \cdot \left(2^{\left|Y \setminus Y_1'\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)\right|} \cdot \left(2^{\left|Y' \setminus Y_1\right|} - 1\right) \cdot 5^{\left|Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1' \cup Y'')\right|} \cdot \left(5^{\left|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|} - 4^{\left|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus Y_1''\right|}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$, სადაც $D' = \{Z_7, Y, Y', Y \cup Y', Y''\}$, $D'' = \{Z_7, Y_1, Y_1', Y_1 \cup Y_1', Y_1''\}$, $D' \neq D''$, $Y_1 \supseteq Y$, $' \supseteq\ '$, $Y_1'' \supseteq Y''$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \left(Y_7^\alpha \times Z_7\right) \cup \left(Y_{Z'}^\alpha \times Z'\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{Z' \cup T'}^\alpha \times (Z' \cup T')\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right),$$

სადაც $Z \subset Z',\ Z \subset T',\ Z' \setminus T' \neq \varnothing,\ T' \setminus Z' \neq \varnothing,\ Z' \cup T' \subset T,\ Z, Z', T', T \in D,\ Y_{Z'}^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$Y_7^\alpha \supseteq Y_1 \cap Y_1',\ Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \supseteq Y_1,\ Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Y_1',\ Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing. \ldots(1)$

ახლა განვმარტოთ f_α ასახვა X სიმრავლიდან D სიმრავლეში შემდეგნაირად: $f_\alpha(t) = t\alpha$ ნებისმიერი $t \in X$. $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ და $f_{4\alpha}$ ასახვებით აღვნიშნოთ f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად $Y_1 \cap Y_1'$, $Y_1 \setminus Y_1'$, $Y_1' \setminus Y_1$, $Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$, $X \setminus Y_1''$ სირავლეებზე.დაშვების თანახმად მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება გვაძლევს X.

ახლა შევისწავლოთ $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ $f_{4\alpha}$ ასახვების თვისებები:

) ვთქვათ $t \in Y_1 \cap Y_1'$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1 \cap Y_1' \subseteq \left(Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha\right) \cap \left(Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha\right) = Y_7^\alpha$. აქედან და Y_7^α სიმრავლის განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha = Z_7$. ამრიგად $f_{0\alpha}(t) = Z_7$,ნებისიერი $t \in Y_1 \cap Y_1'$.

) ვთქვათ $t \in Y_1 \setminus Y_1'$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1 \subseteq Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha$. აქედან და Y_7^α, $Y_{Z'}^\alpha$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha \in \{Z_7, Z'\}$. ამრიგად $f_{1\alpha}(t) \in \{Z_7, Z'\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1 \setminus Y_1'$ სათვის. მეორეს მხრივ $Y_{Z'}^\alpha \cap Y \neq \varnothing$. ე.ი. $z'\alpha = Z'$ რომელიღაც $z' \in Y$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $z' \in Y_1'$, მივიღებთ $z'\alpha \in \{Z_7, T'\}$, რაც ეწინააღმდეგება $z'\alpha = Z'$ ტოლობას, რადგანაც $Z' \notin \{Z_7, T'\}$. ე.ი. $z' \in Y \setminus Y_1'$. ამრიგად $f_{1\alpha}(z') = Z'$ რომელიღაც $z' \in Y \setminus Y_1'$
.

) ვთქვათ $t \in Y_1' \setminus Y_1$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1' \subseteq Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$ აქედან და Y_7^α, $Y_{T'}^\alpha$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha \in \{Z_7, T'\}$. ამრიგად $f_{2\alpha}(t) \in \{Z_7, T'\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$. მეორეს მხრივ $Y_{T'}^\alpha \cap Y' \neq \varnothing$. ე.ი.$t'\alpha = T'$ რომელიღაც $t' \in Y'$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t' \in Y_1$ მივიღებთ $t'\alpha \in \{Z_7, Z'\}$, რაც ეწინააღმდეგება $t'\alpha = T'$ ტოლობას, რადგანაც $T' \notin \{Z_7, Z'\}$, ე.ი. $t' \in Y' \setminus Y_1$. ამრიგად $f_{2\alpha}(t') = T'$, რომელიღაც $t' \in Y' \setminus Y_1$.

) ვთქვათ $t \in Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t \in Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1') \subseteq X = Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{Z' \cup T'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$ და $t\alpha \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$. ამრიგად $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$. მეორეს მხრივ $Y_T^\alpha \cap Y'' \neq \varnothing$.ე.ი. $t_2'\alpha = T$ რომელიღაც $t_2' \in Y''$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t_2' \in (Y_1 \cup Y_1') \subseteq \left(Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha\right) \cup \left(Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha\right)$, მივიღებთ $t_2'\alpha \in \{Z_7, Z', T'\}$ რაც ეწინააღმდეგება $t_2'\alpha = T$ ტოლობას, რადგანაც $T \notin \{Z_7, Z', T'\}$. ე.ი. $t_2' \in Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$. ამრიგად $f_{3\alpha}(t_2') = T$ რომელიღაც $t_2' \in Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$.

) ვთქვათ $t \in X \setminus Y_1''$. $t \in X \setminus Y_1'' \subseteq X = Y_7^\alpha \cup Y_{Z'}^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{Z' \cup T'}^\alpha \cup Y_T^\alpha$ და $t\alpha \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$. ამრიგად $f_{4\alpha}(t) \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus Y_1''$.მივიღეთ, რომ ყოველი

$\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული დალაგებული $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ ასახვათა სისტემა.

შემდგომში ვთქვათ

$f_0 : Y_1 \cap Y_1' \to \{Z_7\}$, $f_1 : Y_1 \setminus Y_1' \to \{Z_7, Z'\}$, $f_2 : Y_1' \setminus Y_1 \to \{Z_7, T'\}$,

$f_3 : Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1') \to \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$, $f_4 : X \setminus Y_1'' \to \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$,

არიან ისეთი ასახვები, როლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

) $f_0(t) = Z_7$, ნებისმიერი $t \in Y_1 \cap Y_1'$;

) $f_1(t) \in \{Z_7, Z'\}$,ნებისმიერი $t \in Y_1 \setminus Y_1'$ და $f_1(t_1) = Z'$ რომელიღაც $t_1 \in Y \setminus Y_1'$;

) $f_2(t) \in \{Z_7, T'\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Y_1$ და $f_2(t_2) = T'$, რომელიღაც $t_2 \in Y' \setminus Y_1$;

) $f_3(t) \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$, ნებისმიერი $t \in Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$ და $f_3(t_3) = T$, რომელიღაც $t_3 \in Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')$;

) $f_{4\alpha}(t) \in \{Z_7, Z', T', Z' \cup T', T\}$, რომელიღაც $X \setminus Y_1''$.

ახლა განვსაზღვროთ $f : X \to D$ ასახვა შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} Z_7, & t \in Y_1 \cap Y_1', \\ f_1(t), & t \in Y_1 \setminus Y_1', \\ f_2(t), & t \in Y_1' \setminus Y_1, \\ f_3(t), & t \in Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1'), \\ f_4(t), & t \in X \setminus Y_1''. \end{cases}$$

შემდგომში დავუშვათ, რომ $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$, $Y_7^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z_7\}$,$Y_{Z'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z'\}$,

$Y_{T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T'\}$, $Y_{Z' \cup T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = Z' \cup T'\}$ და $Y_T^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T\}$. მაშინ β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\beta = (Y_7^\beta \times Z_7) \cup (Y_{Z'}^\beta \times Z') \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_{Z' \cup T'}^\beta \times (Z' \cup T')) \cup (Y_T^\beta \times T)$$

და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Y_7^\beta \supseteq Y_1 \cap Y_1',\ Y_7^\beta \cup Y_{Z'}^\beta \supseteq Y_1,\ Y_7^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Y_1',\ Y_{Z'}^\beta \cap Y \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\beta \cap Y' \neq \varnothing,\ Y_T^\beta \cap Y'' \neq \varnothing.$$

მივიღეთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარულ მიმართებასა და $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ დალაგებულ სისტემას შორის. ლემა 1.3-ის თანახმად $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$, $f_{4\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლია

$$1,\ 2^{|Y_1 \setminus (Y \cup Y_1')|} \cdot \left(2^{|Y \setminus Y_1'|} - 1\right),\ 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot \left(2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1\right),\ 5^{|Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1' \cup Y'')|} \cdot \left(5^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|} - 4^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|}\right),\ 5^{|X \setminus Y_1''|}.$$

ამრგადრეგულარული ელემენტების რაოდენობა შეიძლება გამოვთავლოთ შემდეგნაირად. $2^{|Y_1 \setminus (Y \cup Y_1')|} \cdot \left(2^{|Y \setminus Y_1'|} - 1\right) \cdot 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot \left(2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1\right) \cdot 5^{|Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1' \cup Y'')|} \cdot \left(5^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|} - 4^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Y_1''|}$.

შევნიშნოთ, რომ ასახვათა რაოდენობა არ არის დამოკიდებული $Z, Z', T', T \in D$ ელემენტების შერჩევაზე, სადაც $Z \subset Z'$, $Z \subset T'$, $Z' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \setminus Z' \neq \varnothing$ და $Z' \cup T' \subset T$. D ნახევარმესერის ყველა ასეთ განსხვავებულ ქვენახევარმესერთა რიცხვი ტოლია 6-ის, ე.ი. რეგულარული ელემენეტების რაოდენობა გამოითვლება შემდეგი ფორმლულით:

$$\left|R(D') \cap R(D'')\right| = 6 \cdot 2^{|Y_1 \setminus (Y \cup Y_1')|} \cdot \left(2^{|Y \setminus Y_1'|} - 1\right) \cdot 2^{|Y_1' \setminus (Y' \cup Y_1)|} \cdot \left(2^{|Y' \setminus Y_1|} - 1\right) \cdot 5^{|Y_1'' \setminus (Y_1 \cup Y_1' \cup Y'')|} \cdot \left(5^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|} - 4^{|Y'' \setminus (Y_1 \cup Y_1')|}\right) \cdot 5^{|X \setminus Y_1''|}$$

ბოლო ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$\begin{aligned}
\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| &= 6 \cdot 2^{|Z_6 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|};\\
\left|R(D_2') \cap R(D_4')\right| &= 6 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_4|} \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_6 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|};\\
\left|R(D_3') \cap R(D_5')\right| &= 6 \cdot 2^{|Z_4 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|};\\
\left|R(D_4') \cap R(D_6')\right| &= 6 \cdot 2^{|Z_3 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|Z_4 \setminus Z_1|} \cdot \left(2^{|Z_6 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|};
\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.26. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3(X, 8)$ და $Z_7 \neq \varnothing$.თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{10})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$
\begin{aligned}
R^*(Q_{10}) = {} & 12\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +12\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +12\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& -6\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -6\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -6\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -6\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(5^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

დამტკიცება.ლემა 7.24-ის ძალით გვექნება

$$
\begin{aligned}
R^*(Q_{10}) = \sum_{i=1}^{14} R(D_i') - \left|R(D_1')\cap R(D_3')\right| - \left|R(D_2')\cap R(D_4')\right| - \left|R(D_3')\cap R(D_5')\right| -\\
-\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|
\end{aligned}
$$

აქედან ლემა 7.26-ის და ლემა 7.1-ის გათვალისწინებით მივიღებთ მოცემული ლემის სამართლიანობას .

ლემა დამტკიცებულია.

$\mathbf{k}'$) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 11) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, T, \breve{D}\}$, სადაც $T\in\{Z_2, Z_1\}$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება, რომ

$$
Q_{11}\vartheta_{XI} = \left\{\{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}, \{Z_8, Z_7, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\}\right\}.
$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_{11}, Q_{11})\right| = 2$ და $\left|\Omega(Q_{11})\right| = 2$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$
\begin{aligned}
D_1' = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\},\ D_2' = \{Z_7, Z_5, Z_6, Z_4, Z_2, \breve{D}\},\\
D_3' = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\},\ D_4' = \{Z_7, Z_5, Z_6, Z_4, Z_1, \breve{D}\}.
\end{aligned}
$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა

$$
R^*(Q_{11}) = R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4'). \qquad \ldots(1)
$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

განსაზღვრება 7.27. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X, 8)$ და $Z_7 \neq \varnothing$.თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{11})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ნახევარჯგუფის ყველა

რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 11) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}&\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|=\\&+4\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+4\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

დამტკიცება.ვთქვათ $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)$. მაშინ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარულიმიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$$

სადაც $T''\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$ $Y_7^\alpha,Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2,\\&Y_7^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing;\\&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2,\\&Y_7^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing;\end{aligned}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6\cup Z_5=Z_4$ და $\left(Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4\cap Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_6\cap Y_{T'}^\alpha\neq\varnothing$. მაგრამ ბოლო ტოლობა $\left(Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\neq\varnothing$ ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, ამიტომაც $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)=\varnothing$. ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing,\ R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing.\qquad\ldots(2)$$

ახლა ვთქვათ $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)$. მაშინ $B_X\left(D\right)$ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმარ-თების კვაზინომალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_7^\alpha\times Z_7\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right),$$

სადაც $T''\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$, $Y_7^\alpha,Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned}&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2,\\&Y_7^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing;\\&Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1,\\&Y_7^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_5\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing,\ Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing;\end{aligned}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $\left(Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \supseteq Z_1 \bigcup Z_2 = \breve{D}$ და $\left(Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing$. მაგრამ ბოლო ტოლობა ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას.ე.ი. $R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_4'\right) = \varnothing$. ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა $R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_3'\right) = \varnothing,\ R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_4'\right) = \varnothing.$ ზემოთ დამტკიცებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| + \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right|.$$

ბოლო ტოლობიდან და ლემა 7,1-ის $k)$ პირობიდან მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right| = {} & 4 \cdot \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_6\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|} - 4^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(6^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 5^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + 4 \cdot \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_6\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_5\right|} - 1\right) \cdot \left(5^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|} - 4^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(6^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 5^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

I′) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1 - ის 12) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{12} = \left\{T, T', T'', T' \cup T'', T''', T' \cup T'' \cup T'''\right\}$, სადაც $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing, \left(T' \cup T''\right) \setminus T''' \neq \varnothing$, $T''' \setminus \left(T' \cup T''\right) \neq \varnothing$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად

$$Q_{12}\vartheta_{XI} = \left\{\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}, \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{12}, Q_{12}\right)\right| = 1$ და $\left|\Omega\left(Q_{12}\right)\right| = 4$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}& D_1' = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}, D_2' = \left\{Z_7, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, D_3' = \left\{Z_7, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \\ & D_4' = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\end{aligned}$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$R^*\left(Q_{12}\right) = R\left(D_1'\right) \cup R\left(D_2'\right) \cup R\left(D_3'\right) \cup R\left(D_4'\right) \ldots (1)$$

(იხ.განსაზღვრება 1.9).

ლემა 7.28. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$ და $Z_7 \neq \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_{11}\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა

რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 12) პირობას, მაშინ

$$R^*(Q_{12}) = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right|$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\alpha \in R(D_4')$. მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times \left(T' \cup T''\right)\right) \cup \left(Y_{T'''}^\alpha \times T'''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T'' \cup T'''}^\alpha \times \left(T' \cup T'' \cup T'''\right)\right),$$

სადაც $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $\left(T' \cup T''\right) \setminus T''' \neq \varnothing$, $T''' \setminus \left(T' \cup T''\right) \neq \varnothing$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{array}{l} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'''}^\alpha \cup \supseteq Z_2, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing. \end{array}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $R(D_4') \subseteq R(D_3')$, ბოლო ტოლობიდან და (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$R^*(Q_7) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \ldots (2)$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$. მაშინ α ბინარული მიმართებისათვის სამართლიანი იქნება შემდეგი პირობები:

$$\begin{array}{l} Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'''}^\alpha \cup \supseteq Z_3, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing. \\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'''}^\alpha \cup \supseteq Z_2, \\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T''}^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing. \end{array}$$

ბოლოო პირობებიდან მივიღებთ, რომ $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_6 \cup Z_3 = Z_1$, ე.ი. $\left(Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha\right) \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_1 \cap Y_{T''}^\alpha \supseteq Z_6 \cap Y_{T''}^\alpha \neq \varnothing$. ბოლოო ტოლობა კი ეწინააღმდეგება α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას, ე.ი. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R(D_1') \cap R(D_3') = \varnothing$. დამტკიცებული ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$R^*(Q_{12}) = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right|$$

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 7.29: ვთქვათ $D_2=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_3=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. და $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right)\cup\left(Y_{T'''}^\alpha\times T'''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''\cup T'''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\cup T'''\right)\right),$$

$T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $\left(T'\cup T''\right)\setminus T'''\neq\varnothing$, $T'''\setminus\left(T'\cup T''\right)\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$

მაშინ $\alpha\in R(D_2')\cap R(D_3')$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{gathered}Y_T^\alpha\supseteq Z_7,Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\cup Y_{T'''}^\alpha\cup\supseteq Z_2,\\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing.\end{gathered}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\alpha\in R(D_2')\cap R(D_3')$. მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი პირობები:

$$\begin{gathered}Y_T^\alpha\supseteq Z_7,Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_6,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\cup Y_{T'''}^\alpha\cup\supseteq Z_2,\\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing.\\ Y_T^\alpha\supseteq Z_7,Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\cup Y_{T'''}^\alpha\cup\supseteq Z_2,\\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing.\end{gathered}$$

ბოლოო ტოლობეიდნ და $Z_4\supseteq Z_6$ ჩართვიდან მივიღებთ

$$\begin{gathered}Y_T^\alpha\supseteq Z_7,Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\cup Y_{T'''}^\alpha\cup\supseteq Z_2,\\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing,\ Y_{T'''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing.\end{gathered}$$

ლემა დატკიცებულია.

ლემა 7.30. ვთქვათ $D_2'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ და $D_3'=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|=4\cdot2^{\left|\left(Z_4\setminus\left(Z_6\cup Z_3\right)\right)\right|}\cdot\left(2^{\left|\left(Z_6\setminus Z_3\right)\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $D_2'=\left\{Z_7,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$ და $D_3'=\left\{Z_7,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. თუ $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\alpha=\left(Y_5^\alpha\times T_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times T_4\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times T_3\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times T_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times T_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times T_0\right),$$

სადაც $T_5\subset T_4$, $T_5\subset T_3$, $T_4\setminus T_3\neq\varnothing$, $T_3\setminus T_4\neq\varnothing$, $T_1\setminus T_2\neq\varnothing$, $T_2\setminus T_1\neq\varnothing$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{gathered}Y_5^\alpha\supseteq Z_7,Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2,\\ Y_4^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing,\ Y_3^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing.\end{gathered}\quad\ldots(1)$$

ახლაგანვმარტოთ f_α ასახვა X სიმრავლისა D სიმრავლეში შემდეგნაირად: $f_\alpha(t)=t\alpha$ ნებისმიერი $t\in X$, ხოლო $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$, $f_{4\alpha}$ ასახვები არიან f_α ასახვის შეზღუდვები შესაბამისად $Z_3\cap Z_2$, $Z_4\setminus Z_3$, $Z_3\setminus Z_2$, $Z_2\setminus Z_1$, $X\setminus \breve{D}$ სიმრავლებზე. დაშვების თანახმად მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია და მათი გაერთიანება გვაძლევს X.

ახლა შევისწავლოთ $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$, $f_{4\alpha}$ ასახვები:

1) ვთქვათ $t\in Z_3\cap Z_2$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $Z_3\cap Z_2\subseteq\left(Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha\right)\cap\left(Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\right)=Y_5^\alpha$. აქედან და Y_5^α სიმრავლის განსზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha=Z_5$. ამრიგად $f_{0\alpha}(t)=Z_5$ ნებისმიერი $t\in Z_3\cap Z_2$.

2) ვთქვათ $t\in Z_4\setminus Z_3$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $Z_4\setminus Z_3\subseteq Z_4\subseteq Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha$. აქედან და Y_5^α, Y_4^α სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ $t\alpha\in\{Z_5,Z_4\}$. ამრიგად $f_{1\alpha}(t)\in\{Z_5,Z_4\}$ ნებისმიერი $t\in Z_4\setminus Z_3$.

მეორეს მხრივ $Y_4^\alpha\cap Z_6\neq\varnothing$, ე.ი. $t_1\alpha=Z_6$ რომელიღაც $t_1\in Z_6$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t_1\in Z_3$, მივიღებთ $t_1\alpha\in\{Z_5Z_3\}$. ბოლო პირობა კი ეწინააღმდეგება, ტოლობას რადგანაც $Z_6\notin\{Z_5,Z_3\}$. ამრიგად $f_{1\alpha}(t_1)=Z_6$ რომელიღაც $t_1\in Z_6\setminus Z_3$.

3) ვთქვათ $t\in Z_3\setminus Z_2$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $Z_3\setminus Z_2\subseteq Z_3\subseteq Y_5^\alpha\cup Y_3^\alpha$. აქედან და Y_5^α , Y_3^α სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha\in\{Z_5,Z_3\}$. ამრიგად $f_{2\alpha}(t)\in\{Z_5,Z_3\}$ ნებისმიერი $t\in Z_3\setminus Z_2$. მეორეს მხრივ $Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$, ე.ი. $t_1'\alpha=T'$ რომელიღაც $t_1'\in Z_3$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t_1'\in Z_2$, მივიღებთ $t_1'\in Z_2\subseteq Y_T^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha$.ე.ი. $t_1'\alpha\in\{T,Z,Z'\}$. ბოლო პირობა კი ეწინააღმდეგება $t_1'\alpha=T'$ ტოლობას, რადგანაც $T'\notin\{T,Z,Z'\}$. ამრიგად $f_{2\alpha}(t_1')=T'$ რომელიღაც $t_1'\in Z_3\setminus Z_2$.

4) ვთქვათ $t\in Z_2\setminus\left(Z_3\cup Y_1'\right)$. მაშინ (1) პირობების ძალით გვექნება $t\in Z_2\setminus\left(Z_3\cup Y_1'\right)\subseteq Z_2\subseteq Y_T^\alpha\cup Y_Z^\alpha\cup Y_{Z'}^\alpha$. აქედან და $Y_T^\alpha, Y_Z^\alpha, Y_{Z'}^\alpha$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ $t\alpha\in\{T,Z,Z'\}$. ამრიგად $f_{3\alpha}(t)\in\{T,Z,Z'\}$ ნებისმიერი $t\in Z_2\setminus\left(Z_3\cup Y_1'\right)$. მეორეს

მხრივ $Y_{Z'}^{\alpha} \cap Z_2 \neq \varnothing$, ე.ი. $t_2'\alpha = Z'$ რომელიღაც $t_2' \in Z_2$. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $t_2' \in Z_3 \cup Y_1'$, მივიღებთ $t_2' \in Z_3 \cup Y_1' \subseteq \left(Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}\right) \cup \left(Y_T^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha}\right) = Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha}$. ე.ი $t_2'\alpha \in \{T, T', Z\}$, რაც ეწინააღმდეგება $t_2'\alpha = Z'$ ტოლობას, რადგანაც $Z' \notin \{T, T', Z\}$. ამრიგად $f_{3\alpha}\left(t_2'\right) = Z'$ რომელიღაც $t_2' \in Z_2 \setminus \left(Z_3 \cup Y_1'\right)$.

5) ვთქვათ $t \in X \setminus \breve{D}$. მაშინ (1) პირობების ძალით მივიღებთ $t \in X \setminus \breve{D} \subseteq X = Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_Z^{\alpha} \cup Y_{T'\cup Z}^{\alpha} \cup Y_{Z'}^{\alpha} \cup Y_{T'\cup Z\cup Z'}^{\alpha}$. აქედან და $Y_T^{\alpha}, Y_{T'}^{\alpha}, Y_Z^{\alpha}, Y_{T'\cup Z}^{\alpha}, Y_{Z'}^{\alpha}, Y_{T'\cup Z\cup Z'}^{\alpha}$ სიმრავლეების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ $t\alpha \in \{T, T', Z,\ T' \cup Z,\ Z',\ T' \cup Z \cup Z'\}$. ამრიგად $f_{4\alpha}(t) \in \{T, T', Z,\ T' \cup Z,\ Z',\ T' \cup Z \cup Z'\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \breve{D}$.

მივიღეთ, რომ $\alpha \in R(D') \cap R(D'')$ ბინარული მიმართებისათვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული დალაგებული $\left(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}\right)$ ასახვათა სისტემა.

ახლა ვთქვათ

$$f_0 : Z_3 \cap Z_2 \to \{T\},\ f_1 : Y_1' \setminus Z_3 \to \{T, Z\},\ f_2 : Z_3 \setminus Z_2 \to \{T, T'\},$$

$$f_3 : Z_2 \setminus \left(Z_3 \cup Y_1'\right) \to \{T, Z, Z'\},\ f_4 : X \setminus \breve{D} \to \{T, T', Z,\ T' \cup Z,\ Z',\ T' \cup Z \cup Z'\}$$

არიან ისეთი ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

5) $f_0(t) = T$ ნებისმიერი $t \in Z_3 \cap Z_2$;

6) $f_1(t) \in \{T, Z\}$ ნებისმიერი $t \in Y_1' \setminus Z_3$ და $f_{1\alpha}(t') = Z$ რომელიღაც $t' \in Y' \setminus Z_3$;

7) $f_2(t) \in \{T, T'\}$ ნებისმიერი $t \in Z_3 \setminus Z_2$ და $f_{2\alpha}\left(t_1'\right) = T'$ რომელიღაც $t_1' \in Z_3 \setminus Z_2$;

8) $f_3(t) \in \{T, Z, Z'\}$ ნებისმიერი $t \in Z_2 \setminus \left(Z_3 \cup Y_1'\right)$ და $f_{3\alpha}\left(t_2'\right) = Z'$ რომელიღაც $t_2' \in Z_2 \setminus \left(Z_3 \cup Y_1'\right)$;

9) $f_4(t) \in \{T, T', Z,\ T' \cup Z,\ Z',\ T' \cup Z \cup Z'\}$ ნებისმიერი $t \in X \setminus \breve{D}$;

ახლა განვსაზღვროთ f ასახვა X სიმრავლიდან D სიმრავლეში შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in Z_3 \cap Z_2, \\ f_1(t), & t \in Y_1' \setminus Z_3, \\ f_2(t), & t \in Z_3 \setminus Z_2, \\ f_3(t), & t \in Z_2 \setminus \left(Z_3 \cup Y_1'\right), \\ f_4(t), & t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

ვთქვათ $\beta=\bigcup_{x\in X}\left(\{x\}\times f(x)\right)$, $Y_T^\beta=\{t\mid t\beta=T\}$, $Y_{T'}^\beta=\{t\mid t\beta=T'\}$, $Y_Z^\beta=\{t\mid t\beta=Z\}$, $Y_{T'\cup Z}^\beta=\{t\mid t\beta=T'\cup Z\}$, $Y_{Z'}^\beta=\{t\mid t\beta=Z'\}$ და $Y_{T'\cup Z\cup Z'}^\beta=\{t\mid t\beta=T'\cup Z\cup Z'\}$. მაშინ β ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას აქვს სახე

$$\beta=\left(Y_T^\beta\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\beta\times T'\right)\cup\left(Y_Z^\beta\times Z\right)\cup\left(Y_{T'\cup Z}^\beta\times(T'\cup Z)\right)\cup\left(Y_{Z'}^\beta\times Z'\right)\cup\left(Y_{T'\cup Z\cup Z'}^\beta\times(T'\cup Z\cup Z')\right)$$

და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{array}{l} Y_T^\beta\supseteq Y_1,\ Y_T^\beta\cup Y_{T'}^\beta\supseteq Z_3,\ Y_T^\beta\cup Y_Z^\beta\supseteq Y_1',\ Y_T^\beta\cup Y_Z^\beta\cup Y_{Z'}^\beta\supseteq Z_2,\\ Y_{T'}^\beta\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_Z^\beta\cap Y'\neq\varnothing,\ Y_{Z'}^\beta\cap Z_2\neq\varnothing. \end{array}$$

მივიღეთ, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა $\alpha\in R(D')\cap R(D'')$ ბინარულ მიმართებასა და $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha})$ დალაგებულ სისტემას შორის. ლემა 1.3-ის ძალით $f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}, f_{4\alpha}$ ასახვათა რაოდენობა შესაბამისად ტოლია

$$1,\ 2^{\left|(Y_1'\setminus Z_3)\setminus(Y'\setminus Z_3)\right|}\cdot\left(2^{\left|(Y'\setminus Z_3)\right|}-1\right), 2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1,\ 3^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|}-2^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|},\ 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

შევნიშნოთ, რომ $2^{\left|(Y_1'\setminus(Y'\cup Z_3))\right|}\cdot\left(2^{\left|(Y'\setminus Z_3)\right|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|}-2^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$ რიცხვი არ არის დამოკიდებული D ნახევარმესერის $\{T,T',Z,\ T'\cup Z,\ Z',\ T'\cup Z\cup Z'\}$ სახის ქვენახევარმესერის შერჩევაზე. რადგანაც ასეთ განსხვავებულ ქვენახევარმესერთა რაოდენობა ტოლია 6-ის, ამიტომ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$$\left|R(D')\cap R(D'')\right|=m_0\cdot 2^{\left|(Y_1'\setminus(Y'\cup Z_3))\right|}\cdot\left(2^{\left|(Y'\setminus Z_3)\right|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|}-2^{\left|Z_2\setminus(Z_3\cup Y_1')\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

აქედან მივიღებთ:

$$\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|=4\cdot\left(2^{\left|(Z_6\setminus Z_3)\right|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

ლემა 7.30. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{12})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 7.1-ის 12) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}R^*\left(Q_{12}\right)=4\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\+4\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\+4\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\-4\cdot 2^{\left|Z_4\setminus\left(Z_6\cup Z_3\right)\right|}\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

დამტკიცება: ლემა 7.28-ის, ლემა 7.29-ის და ლემა 7.1 m) პირობის ძალით

გამომდინარეობს მოცემული ლემის სამართლიანობა.

m$'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 13) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{13}\vartheta_{XI}=\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია,რომ $\left|\Phi\left(Q_{13},Q_{13}\right)\right|=1$ და $\left|\Omega\left(Q_{13}\right)\right|=1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_1'=\left\{Z_7,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$$

მივიღებთ

$$R^*\left(Q_{13}\right)=R\left(D_1'\right),\ \left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_7\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|\left(Z_3\cap Z_2\right)\setminus Z_5\right|}\cdot\left(3^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

n') ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 14) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{14}\vartheta_{XI}=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{14},Q_{14}\right)\right|=4$ და $\left|\Omega\left(Q_{14}\right)\right|=1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},$$

მივიღებთ

$$R^*\left(Q_{14}\right)=R\left(D_1'\right),\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|=\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(7^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

o$'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 15) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ

$\left|\Phi\left(Q_{15},Q_{15}\right)\right|=4$ და $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right|=1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, მივიღებთ

$$R^*\left(Q_{15}\right)=R\left(D_1'\right),\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|\left(Z_1\cap Z_2\right)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

p$'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 7.1-ის 16) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_{16}\vartheta_{XI}=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{16},Q_{16}\right)\right|=1$ და $\left|\Omega\left(Q_{16}\right)\right|=1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_1'=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},$$

მივიღებთ

$$R^*\left(Q_{16}\right)=R\left(D_1'\right),\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და $\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|\left(Z_3\cap Z_2\right)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

ახლა ვთქვათ $r=\sum_{i=1}^{16}\left|R^*\left(Q_i\right)\right|$.

თეორემა 7.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7\neq\varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და R_D სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარულ ელემეტთა სიმრავლეს, მაშინ $\left|R_D\right|=r$.

დამტკიცება. მოცემული თეორემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 7.1.-დან.

მაგალითი 7.1. ვთქვათ $X=\left\{1,2,3,4,5\right\}$ და

$$P_0=\left\{1\right\},\ P_1=\left\{2\right\},\ P_2=\left\{3\right\},P_3=\left\{4\right\},\ P_6=\left\{5\right\},\ P_4=P_5=P_7=\varnothing.$$

მაშინ $\breve{D}=\left\{1,2,3,4,5\right\}$, $Z_1=\left\{1,3,4,5\right\}$, $Z_2=\left\{1,2,4,5\right\}$, $Z_3=\left\{1,3,5\right\}$, $Z_4=\left\{1,4,5\right\}$, $Z_5=\left\{1,5\right\}$, $Z_6=\left\{1,4\right\}$, $Z_7=\left\{1\right\}$ და $D=\left\{\left\{1\right\},\left\{1,4\right\},\left\{1,5\right\},\left\{1,4,5\right\},\left\{1,3,5\right\},\left\{1,2,4,5\right\},\left\{1,3,4,5\right\},\left\{1,2,3,4,5\right\}\right\}$.

როცა $Z_7 \neq \varnothing$ გვექნება $\left|R^*\left(Q_1\right)\right| = 8$, $\left|R^*\left(Q_2\right)\right| = 345$, $\left|R^*\left(Q_3\right)\right| = 1178$, $\left|R^*\left(Q_4\right)\right| = 500$, $\left|R^*\left(Q_5\right)\right| = 25$, $\left|R^*\left(Q_6\right)\right| = 420$, $\left|R^*\left(Q_7\right)\right| = 112$, $\left|R^*\left(Q_8\right)\right| = 8$, $\left|R^*\left(Q_9\right)\right| = 2$, $R^*\left(Q_{10}\right) = 120$, $\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right| = 8$, $R^*\left(Q_{12}\right) = 28$, $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right| = 1$, $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| = 1$, $\left|R\left(Q_{15}\right)\right| = 4$, $\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = 1$, $\left|R_D\right| = 2761$.

8. $\Sigma_3(X,8)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული $B_X(D)$ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების რეგულარული ელემენტები როცა $Z_7 = \varnothing$

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია $\Sigma_3\left(X,8\right)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები და აღწერილია მათი რეგულარული ელემენტები. განხილულია ის შემთხვევა, როცა X სასრულო სიმრავლეა და $Z_7 = \varnothing$. გამოყვანილია ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დათვლილია მოცემული ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების რაოდენობა.

თეორემა 8.1. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართების კვაზინორმალურ წარმოდგენას ექნება ქვემოთ მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი, თუ არსებობს ისეთი φ სრული $\alpha-$იზომორფიზმი $V\left(D,\alpha\right)$ ნახევარმესერიდან D' ნახევარმესერში, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\alpha=\varnothing$;

2) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$, სადაც $\varnothing\neq T'\in D$, $Y_{T'}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, სადაც $\varnothing\neq T'\subset T''\in\breve{D}$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi\left(T'\right)$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi\left(T''\right)\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'''}^\alpha\times T'''\right)$, სადაც $\varnothing\neq T'\subset T''\subset T'''\in D$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi\left(T'\right)$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi\left(T''\right)$ $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi\left(T''\right)\neq\varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha\cap\varphi\left(T'''\right)\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $Z_7\neq T\subset T'\subset T''\subset\breve{D}$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_0^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi\left(T\right)$ $Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi\left(T'\right)$, $Y_7^\alpha\cup Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi\left(T''\right)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi\left(T\right)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi\left(T''\right)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'\cup T''}^\alpha\times\left(T'\cup T''\right)\right)$, სადაც $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi\left(T'\right)$, $Y_7^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi\left(T''\right)$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi\left(T''\right)\neq\varnothing$;

7) $\alpha=\left(Y_7^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_{T'''}^\alpha\times T'''\right)\cup\left(Y_{T''\cup T'''}^\alpha\times\left(T''\cup T'''\right)\right)$, სადაც $\varnothing\neq T'\subset T''$, $\varnothing\neq T'\subset T'''$, $T''\setminus T'''\neq\varnothing$, $T'''\setminus T''\neq\varnothing$ $Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha,Y_{T'''}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha\supseteq\varnothing$

$Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_{T'''}^\alpha \supseteq T'''$ $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha \cap T''' \neq \varnothing$;

8) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $T \in \{Z_6, Z_5\}$, $Y_T^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq \varphi(Z_4)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq \varphi(Z_2)$, $Y_7^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq \varphi(Z_1)$, $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$ $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$;

9) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Z_5 \subset Z_3$, $Z_5 \subset Z_4$, $Z_3 \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus Z_3 \neq \varnothing$ $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$ $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

10) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')\right) \cup \left(Y_{T'''}^\alpha \times T'''\right)$, სადაც $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $T' \cup T'' \subset T'''$ $Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_7^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$, $Y_{T'''}^\alpha \cap \varphi(T''') \neq \varnothing$;

11) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_6^\alpha \times Z_6\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $T \in \{Z_2, Z_1\}$, $Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$ $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$ $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

12) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T''}^\alpha \times (T' \cup T'')\right) \cup \left(Y_{T'''}^\alpha \times T'''\right) \cup \left(Y_{T' \cup T'' \cup T'''}^\alpha \times (T' \cup T'' \cup T''')\right)$, სადაც $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$, $T'' \subset T'''$, $(T' \cup T'') \setminus T''' \neq \varnothing$, $T''' \setminus (T' \cup T'') \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha, Y_{T'''}^\alpha, Y_{T' \cup T'' \cup T'''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_7^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq \varphi(T'')$ $Y_7^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \cup Y_{T'''}^\alpha \supseteq \varphi(T''')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$ $Y_{T'''}^\alpha \cap \varphi(T''') \neq \varnothing$;

13) $\alpha = \left(Y_7^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$, სადაც $Z_5 \subset Z_3$, $Z_5 \subset Z_4$, $Z_3 \setminus Z_4 \neq \varnothing$, $Z_4 \setminus Z_3 \neq \varnothing$, $Z_4 \subset Z_2$, $Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing$, $Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing$, , $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და

აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq Z_7$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$ $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$ $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$;

14) $\alpha = (Y_7^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $Z_6 \subset Z_4$, $Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$ $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

15) $\alpha = (Y_7^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$ $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$ $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$ $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$;

16) $\alpha = (Y_7^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_6^\alpha \times Z_6) \cup (Y_5^\alpha \times Z\ ) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_3^\alpha \times Z_3) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $Y_6^\alpha, Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $Y_7^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_7^\alpha \cup Y_6^\alpha \supseteq Z_6$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_3^\alpha \supseteq Z_3$, $Y_7^\alpha \cup Y_5^\alpha \cup Y_6^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_5^\alpha \cap Z_5 \neq \varnothing$, $Y_6^\alpha \cap Z_6 \neq \varnothing$, $Y_3^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$;

დამტკიცება. მოცემული თეორემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 7.1-დან.

ლემა 8.1. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

a) $|R^*(Q_1)| = 1$;

b) $|R^*(Q_2)| = m_0 \cdot (2^{|T'|} - 1) \cdot 2^{|X \setminus T'|}$;

c) $|R^*(Q_3)| = m_0 \cdot (2^{|T'|} - 1) \cdot (3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}) \cdot 3^{|X \setminus T''|}$;

d) $|R^*(Q_4)| = m_0 \cdot (2^{|T'|} - 1) \cdot (3^{|T'' \setminus T'|} - 2^{|T'' \setminus T'|}) \cdot (4^{|T''' \setminus T''|} - 3^{|T''' \setminus T''|}) \cdot 4^{|X \setminus T'''|}$;

e) $|R^*(Q_5)| = m_0 \cdot (2^{|T|} - 1) \cdot (3^{|T' \setminus T|} - 2^{|T' \setminus T|}) \cdot (4^{|T'' \setminus T'|} - 3^{|T'' \setminus T'|}) \cdot (5^{|\breve{D} \setminus T''|} - 4^{|\breve{D} \setminus T''|}) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}$;

f) $|R^*(Q_6)| = 2 \cdot m_0 \cdot (2^{|T' \setminus T''|} - 1) \cdot (2^{|T'' \setminus T'|} - 1) \cdot 4^{|X \setminus (T' \cup T'')|}$;

g) $\left|R^*\left(Q_7\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|T'|}-1\right)\cdot 2^{|(T''\cap T''')\setminus T'|}\cdot\left(3^{|T''\setminus T'''|}-2^{|T''\setminus T'''|}\right)\cdot\left(3^{|T'''\setminus T''|}-2^{|T'''\setminus T''|}\right)\cdot 5^{|X\setminus(T''\cup T''')|}$;

h) $\left|R^*\left(Q_8\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|T|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus T|}-2^{|Z_4\setminus T|}\right)\cdot 3^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(4^{|Z_1\setminus Z_2|}-3^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$;

i) $\left|R^*\left(Q_9\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_4)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus(Z_3\cup Z_4)|}-5^{|\breve{D}\setminus(Z_3\cup Z_4)|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$;

j) $\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|T'\setminus T''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(5^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}-4^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}\right)\cdot 5^{|X\setminus T'''|}$;

k) $\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot\left(2^{|T'\setminus T|}-1\right)\cdot\left(5^{|T''\setminus Z_4|}-4^{|T''\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(6^{|\breve{D}\setminus T''|}-5^{|\breve{D}\setminus T|''}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}$;

l) $\left|R^*\left(Q_{12}\right)\right| = m_0\cdot\left(2^{|T'\setminus T'''|}-1\right)\cdot\left(2^{|T''\setminus T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}-2^{|T'''\setminus(T'\cup T'')|}\right)\cdot 6^{|X\setminus(T'\cup T''\cup T''')|}$;

m) $\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right| = m_0\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_2)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_2|}-2^{|Z_4\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(4^{|Z_2\setminus Z_1|}-3^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$;

n) $\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right| = m_0\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(7^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-6^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$;

o) $\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right| = 4\cdot m_0\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 4^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\ \left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(5^{|Z_1\setminus Z_2|}-4^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 7^{|X\setminus\breve{D}|}$

p) $\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right| = \left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(5^{|Z_2\setminus Z_1|}-4^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 8^{|X\setminus\breve{D}|}$

დამტკიცება:მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.1-დან.

1) **ლემა 8.2.** ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ

$$\left|R^*\left(Q_1\right)\right|=1.$$

2) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 2) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_2=\left\{\varnothing,T'\right\}$, D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება

$$Q_2\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_6\right\},\left\{\varnothing,Z_5\right\}\ \left\{\varnothing,Z_4\right\},\left\{\varnothing,Z_3\right\},\left\{\varnothing,Z_2\right\},\left\{\varnothing,Z_1\right\}\right\}$$

ცხადია, რომ $\left|\Phi\left(Q_2,Q_2\right)\right|=1$და $\left|\Omega\left(Q_2\right)\right|=7$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{\varnothing,\breve{D}\right\},\ \ D_2'=\left\{\varnothing,Z_6\right\},\ \ D_3'=\left\{\varnothing,Z_5\right\},\ \ D_4'=\left\{\varnothing,Z_4\right\},$$
$$D_5'=\left\{\varnothing,Z_3\right\},\ \ D_6'=\left\{\varnothing,Z_2\right\},D_7'=\left\{\varnothing,Z_1\right\}$$

მივიღებთ

$$R^*(Q_2)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3') \cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7') \quad \ldots(1)$$

(იხ.განმარტება 1.9).

ლემა 8.3. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R^*(Q_2)\right|=7\cdot\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.3-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ მხოლოდ იმ ქვენახევრმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს.

$c)$ ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 3) პირობას.მოცემულ შემთხვევაში $Q_2=\{\varnothing,T',T''\}$, სადაც $T',T''\in D$ და $\varnothing\neq T'\subset T''$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} Q_3\vartheta_{XI}=\Big\{&\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_3,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_4,D\},\{\varnothing,Z_5,\breve{D}\},\\ &\{\varnothing,Z_6,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_6,Z_4\},\{\varnothing,Z_6,Z_2\},\{\varnothing,Z_6,Z_1\},\{\varnothing,Z_5,Z_4\},\\ &\{\varnothing,Z_5,Z_3\},\{\varnothing,Z_5,Z_2\},\{\varnothing,Z_5,Z_1\},\{\varnothing,Z_4,Z_2\},\{\varnothing,Z_4,Z_1\},\{\varnothing,Z_3,Z_1\}\Big\}\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_3,Q_3)\right|=1$ და $\left|\Omega(Q_3)\right|=16$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{gathered} D_1'=\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\},\quad D_2'=\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\},\quad D_3'=\{\varnothing,Z_3,\breve{D}\},\quad D_4'=\{\varnothing,Z_4,D\},\\ D_5'=\{\varnothing,Z_5,\breve{D}\},D_6'=\{\varnothing,Z_6,\breve{D}\},\quad D_7'=\{\varnothing,Z_6,Z_4\},\ D_8'=\{\varnothing,Z_6,Z_2\},\\ D_9'=\{\varnothing,Z_6,Z_1\},\ D_{10}'=\{\varnothing,Z_5,Z_4\},D_{11}'=\{\varnothing,Z_5,Z_3\},\ D_{12}'=\{\varnothing,Z_5,Z_2\},\\ D_{13}'=\{\varnothing,Z_5,Z_1\},\ D_{14}'=\{\varnothing,Z_4,Z_2\},\ D_{15}'=\{\varnothing,Z_4,Z_1\},D_{16}'=\{\varnothing,Z_3,Z_1\}\end{gathered}$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned} R^*(Q_3)=&R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup\\ &\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8')\cup R(D_9')\cup R(D_{10}')\cup\\ &\cup R(D_{11}')\cup R(D_{12}')\cup R(D_{13}')\cup R(D_{14}')\cup R(D_{15}')\cup\\ &\cup R(D_{16}')\end{aligned} \quad \ldots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 8.4. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ

$$\begin{aligned}
&\left|R^*(Q_3)\right|=\sum_{i=1}^{6}\left|R(D_i')\right|+\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right|-\\
&-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|-\\
&-\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_4')\cap R(D_5')\right|-\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|
\end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.4-დან.

ლემა 8.5. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$და $Z_7\neq\varnothing$. მააშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned}
&\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|=16\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|=16\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_1')\cap R(D_5')\right|=16\cdot 2^{|Z_1\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|=16\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_3')\cap R(D_5')\right|=16\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_4')\cap R(D_5')\right|=16\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},\\
&\left|R(D_4')\cap R(D_6')\right|=16\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},
\end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.6-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$.

ლემა 8.6. ვთქვათ $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_3)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 3) პირობას, მაშინ

$$\left|R^*\left(Q_3\right)\right| = 16\cdot\left(2^{\left|Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot\left(2^{\left|Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot\left(2^{\left|Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot\left(2^{\left|Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_6\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_6\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+16\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-$$
$$-16\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_6\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

დამტკიცება.მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.7-დან, თუ დავუშვებთ რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ მხოლოდ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია ამ შემთხვევაში $m_0=16$.

$\mathbf{d}'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის4) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_4=\left\{\varnothing,T',T'',T'''\right\}$, სადაც $T',T'',T'''\in D$ და $\varnothing\neq T'\subset T''\subset T'''$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned}Q_4\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_6,Z_2,D\right\},\ \left\{\varnothing,Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_5,Z_4,\breve{D}\right\},\\ &\left\{\varnothing,Z_5,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_5,Z_2,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_5,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_4,Z_2,D\right\},\\ &\left\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ \left\{\varnothing,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\ \ \left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_2\right\},\ \left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_1\right\},\\ &\left\{\varnothing,Z_5,Z_3,Z_1\right\},\ \left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_2\right\},\ \left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_1\right\}\Big\}\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_4,Q_4\right)\right|=1$და $\left|\Omega\left(Q_4\right)\right|=15$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$
\begin{aligned}
&D_1' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_4, \breve{D}\right\}, D_2' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_2, D\right\}, D_3' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_1, \breve{D}\right\},\\
&D_4' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, \breve{D}\right\}, D_5' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}, D_6' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_2, \breve{D}\right\},\\
&D_7' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}, D_8' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_2, D\right\}, D_9' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}, \qquad .\\
&D_{10}' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, D_{11}' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_4, Z_2\right\}, D_{12}' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_4, Z_1\right\}\\
&D_{13}' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_2\right\}, D_{14}' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_1\right\}, D_{15}' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_3, Z_1\right\},
\end{aligned}
$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$
\begin{aligned}
R^*\left(Q_4\right) = {} & R\left(D_1'\right) \cup R\left(D_2'\right) \cup R\left(D_3'\right) \cup R\left(D_4'\right) \cup R\left(D_5'\right) \cup \\
& \cup R\left(D_6'\right) \cup R\left(D_7'\right) \cup R\left(D_8'\right) \cup R\left(D_9'\right) \cup R\left(D_{10}'\right) \cup \ldots (1)\\
& \cup R\left(D_{11}'\right) \cup R\left(D_{12}'\right) \cup R\left(D_{13}'\right) \cup R\left(D_{14}'\right) \cup R\left(D_{15}'\right)
\end{aligned}
$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 8.7. თუ X სასრულო სიმრავლეა, $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$და $Z_7 = \varnothing$

,მაშინ

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_4\right)\right| = \sum_{i=1}^{10}\left|R\left(D_i'\right)\right| & - \left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right)\right| - \left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_3'\right)\right| - \\
& - \left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_8'\right)\right| - \left|R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_9'\right)\right| - \left|R\left(D_4'\right) \cap R\left(D_6'\right)\right| - \\
& - \left|R\left(D_4'\right) \cap R\left(D_7'\right)\right| - \left|R\left(D_6'\right) \cap R\left(D_8'\right)\right| - \left|R\left(D_7'\right) \cap R\left(D_9'\right)\right| - \\
& - \left|R\left(D_7'\right) \cap R\left(D_{10}'\right)\right|
\end{aligned}
$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს გამომდინარეობს ლემა 7.8-დან.

ლემა 8.8. თუ X სასრულო სიმრავლეა, $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$და $Z_7 = \varnothing$

,მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_2'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_6|}-2^{|Z_4\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_6|}-2^{|Z_4\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_9'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_5'\right)\cap R\left(D_7'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_6'\right)\cap R\left(D_8'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_7'\right)\cap R\left(D_9'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_7'\right)\cap R\left(D_{10}'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$
$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_7'\right)\right|=15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობსლემა 7.10-დან.

ლემა 8.9. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_4\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 4) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right|=&\,15\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_6|}-2^{|Z_4\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_6|}-2^{|Z_2\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_6|}-2^{|Z_1\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+15\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+15\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_7|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&-15\cdot 3^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_6|}-2^{|Z_4\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 3^{|Z_6\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_6|}-2^{|Z_4\setminus Z_6|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 3^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_5|}-2^{|Z_4\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_3|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_5|}-2^{|Z_3\setminus Z_5|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_2|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-15\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_7|}-1\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_3|}-2^{|Z_1\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.11 -დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ მხოლოდ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია ამ შემთხვევაში $m_0=15$.

e′) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 5) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_5=\left\{\varnothing,T,T',T'',\breve{D}\right\}$, სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'\subset T''\in D$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$
\begin{gathered}
Q_5\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\right.\\
\left.\left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}.
\end{gathered}
$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_5,Q_5\right)\right|=1$ და $\left|\Omega\left(Q_5\right)\right|=5$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$
\begin{gathered}
D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\\
D_4'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_5'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}
\end{gathered}
$$

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა

$$R^*(Q_5) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5') \ldots (1)$$

(იხ. განმარტება 1.9).

ლემა 8.10. თუ X სასრულო სიმრავლეა, $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7 = \varnothing$,მაშინ

$$\left|R^*(Q_5)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| + \left|R(D_5')\right|$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.12-დან.

ლემა 8.11. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_5)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 5) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_5)\right| = {} & 5 \cdot \left(2^{|Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 5 \cdot \left(2^{|Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 5 \cdot \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 5 \cdot \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 5 \cdot \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_5|}\right) \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(5^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 4^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}
\end{aligned}$$

დამტკიცება.მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.13-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7 = \varnothing$ და განვიხილავთ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია მოცემულ შემთხვევაში $m_0 = 5$.

$\mathbf{f}'$) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 6) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_6 = \{T, T', T'', T' \cup T''\}$, სადაც $T, T', T'' \in D$ და $T \subset T'$, $T \subset T''$, $T' \setminus T'' \neq \varnothing$, $T'' \setminus T' \neq \varnothing$. D ნახევარმესრის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$Q_6 \vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\},\ \{\varnothing, Z_6, Z_5, Z_4\}, \{\varnothing, Z_6, Z_3, Z_1\},\ \{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_1\},\ \{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\right\}$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_6, Q_6)\right| = 2$ და $\left|\Omega(Q_6)\right| = 10$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D'_1=\{\varnothing,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ D'_2=\{\varnothing,Z_1,Z_2,\breve{D}\},\ D'_3=\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4\},\ D'_4=\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4\},$$
$$D'_5=\{\varnothing,Z_6,Z_3,Z_1\},\ D'_6=\{\varnothing,Z_3,Z_6,Z_1\},\ D'_7=\{\varnothing,Z_4,Z_3,Z_1\},D'_8=\{\varnothing,Z_3,Z_4,Z_1\},$$
$$D'_9=\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ D'_{10}=\{\varnothing,Z_2,Z_3,\breve{D}\},$$

მაშინ

$$\begin{aligned}R^*(Q_6)=R(D'_1)\cup R(D'_2)\cup R(D'_3)\cup R(D'_4)\cup R(D'_5)\cup R(D'_6)\cup\\ \cup R(D'_7)\cup R(D'_8)\cup R(D'_9)\cup R(D'_{10})\end{aligned}\quad\ldots(1)$$

(იხ. განმარტება 1.9).

ლემა 8.12. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned}&\left|R^*(Q_6)\right|=\sum_{i=1}^{10}\left|R(D'_i)\right|-\left|R(D'_1)\cap R(D'_{10})\right|-\left|R(D'_2)\cap R(D'_9)\right|-\\&-\left|R(D'_3)\cap R(D'_5)\right|-\left|R(D'_4)\cap R(D'_6)\right|-\left|R(D'_5)\cap R(D'_7)\right|-\left|R(D'_6)\cap R(D'_8)\right|-\\&-\left|R(D'_7)\cap R(D'_{10})\right|-\left|R(D'_8)\cap R(D'_9)\right|\end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.14-დან.

ლემა 8.13. თუ X სასრულო სიმრავლეა, $D=\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$,მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\begin{aligned}\left|R(D'_1)\cap R(D'_{10})\right|&=5\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},\\
\left|R(D'_2)\cap R(D'_9)\right|&=5\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},\\
\left|R(D'_3)\cap R(D'_5)\right|&=5\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|},\\
\left|R(D'_4)\cap R(D'_6)\right|&=5\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|},\\
\left|R(D'_5)\cap R(D'_7)\right|&=5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|},\\
\left|R(D'_6)\cap R(D'_8)\right|&=5\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|},\\
\left|R(D'_7)\cap R(D'_{10})\right|&=5\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},\\
\left|R(D'_8)\cap R(D'_9)\right|&=5\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},\end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.15-დან.

ლემა 8.14. ვთქვათ $D=\left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_6)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 6) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}
\left|R^*(Q_6)\right| = {} & 10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+20\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+10\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_4|}+20\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\\
&-5\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_4|}\cdot\left(2^{|Z_5\setminus Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|Z_6\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_3\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_6\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus Z_1|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
&-5\cdot 2^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}$$

დამტკიცება. მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.17-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია ასეთ შემთხვევაში $m_0=7$.

g′) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 7) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\{T, T', T'', T''', T''\cup T'''\}$, სადაც $T, T', T'', T'''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $T\subset T'\subset T'''$, $T\setminus T'\neq\varnothing$ და $T'\setminus T\neq\varnothing$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება

$$Q_7\vartheta_{XI}=\left\{\begin{array}{l}\left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\\ \left\{\varnothing, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\}\end{array}\right.$$

ადვილიდასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_7, Q_7)\right|=2$ და $\left|\Omega(Q_6)\right|=7$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, D_2' = \left\{\varnothing, Z_4, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_3' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},$$
$$D_4' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},\ D_5' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}, D_6' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$
$$D_7' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, D_8' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_2, Z_3, \breve{D}\right\}, D_9' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1\right\},$$
$$D_{10}' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_3, Z_4, Z_1\right\}$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\begin{aligned} R^*\left(Q_7\right) = {} & R\left(D_1'\right) \cup R\left(D_2'\right) \cup R\left(D_3'\right) \cup R\left(D_4'\right) \cup R\left(D_5'\right) \cup R\left(D_6'\right) \cup \\ & \cup R\left(D_7'\right) \cup R\left(D_8'\right) \cup R\left(D_9'\right) \cup R\left(D_{10}'\right) \end{aligned} \quad \ldots(1)$$

(იხ. განმარტება 1.9).

ლემა 8.15. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$ და $Z_7 = \varnothing$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned} \left|R^*\left(Q_7\right)\right| = {} & \sum_{i=1}^{7}\left|R\left(D_i'\right)\right| - \left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_3'\right)\right| - \left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_5'\right)\right| - \\ & - \left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_4'\right)\right| - \left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_6'\right)\right| - \left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_7'\right)\right| - \\ & - \left|R\left(D_5'\right) \cap R\left(D_8'\right)\right| - \left|R\left(D_7'\right) \cap R\left(D_{10}'\right)\right| - \left|R\left(D_8'\right) \cap R\left(D_9'\right)\right| \end{aligned}$$

დამტკიცება. მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.18-დან.

ლემა 8.16. თუ X სასრულო სიმრავლეა, $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X, 8\right)$ და $Z_7 = \varnothing$,მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_3'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus Z_6\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_6\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_1 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_5'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_1 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_4'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus Z_6\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_6\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_2 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_6'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_1 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_2'\right) \cap R\left(D_7'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_4\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_2 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_5'\right) \cap R\left(D_8'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_5 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_1 \cap Z_2\right) \setminus Z_5\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_1 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_7'\right) \cap R\left(D_{10}'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_5 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_3 \cap Z_2\right) \setminus Z_5\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_8'\right) \cap R\left(D_9'\right)\right| = 5 \cdot 2^{\left|Z_5 \setminus Z_5\right|} \cdot \left(2^{\left|Z_5\right|} - 1\right) \cdot 2^{\left|\left(Z_3 \cap Z_2\right) \setminus Z_5\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 3^{\left|Z_3 \setminus \breve{D}\right|} \cdot \left(3^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 5^{\left|X \setminus \breve{D}\right|};$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.20-დან.

ლემა 8.17. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_7\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 7) პირობას, მაშინ

$$
\begin{aligned}
\left|R^*\left(Q_7\right)\right| = {} & 10\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +10\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_6|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +10\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +10\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_3)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& +10\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_4\cap Z_3)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
& -5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_6|}\cdot\left(2^{|Z_6|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{\|Z_1\setminus Z_2\|}-2^{\|Z_1\setminus Z_2\|}\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_4\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_4|}\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_3|}-2^{|Z_2\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}\cdot 3^{|Z_2\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|Z_1\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_3)\setminus Z_5|}\cdot 3^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}-\\
& -5\cdot 2^{|Z_5\setminus Z_5|}\cdot\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_2\cap Z_3)\setminus Z_5|}\cdot 3^{|Z_2\setminus Z_1|}\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|Z_3\setminus\breve{D}|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_2|}-2^{|Z_3\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}
\end{aligned}
$$

დამტკიცება.მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.21-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ იმ ქვენახევარ- მესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია ამ შემთხვევაში $m_0=7$.

$\mathbf{h}'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 8) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $Q_8=\left\{Z_7,T,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\left\{Z_5,Z_6\right\}$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება

$$
Q_8\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_6,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}.
$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_8,Q_8\right)\right|=2$ და $\left|\Omega\left(Q_8\right)\right|=2$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_2' = \left\{\varnothing, Z_6, Z_4, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\},$$
$$D_3' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\},\ D_4' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_1, Z_2, \breve{D}\right\}.$$

მივიღებთ

$$R^*(Q_8) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4'). \qquad \dots(1)$$

(იხ. განსაზღვრება 1.9).

ლემა 8.18. ვთქვათ $D = \left\{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3(X, 8)$ და $Z_7 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_8)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 8) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} \left|R^*(Q_8)\right| &= \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| + \left|R(D_4')\right| = \\ &= 4 \cdot \left(2^{|Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_6|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_6|}\right) \cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \\ &\cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|} + 4 \cdot \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_5|}\right) \cdot \\ &\cdot 3^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_4|} \cdot \left(4^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 3^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 6^{|X \setminus \breve{D}|}. \end{aligned}$$

დამტკიცება. მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.22-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7 = \varnothing$.

i′) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 9) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად $Q_9 \vartheta_{XI} = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi(Q_9, Q_9)\right| = 2$ და $\left|\Omega(Q_9)\right| = 1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\},$$

მაშინ

$$R^*(Q_9) = R(D_1'),\ \left|R^*(Q_9)\right| = \left|R(D_1')\right|$$

და

$$\left|R^*\left(Q_9\right)\right|=\left(2^{|Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|(Z_3\cap Z_4)\setminus Z_5|}\cdot\left(3^{|Z_3\setminus Z_4|}-2^{|Z_3\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|Z_4\setminus Z_3|}-2^{|Z_4\setminus Z_3|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

j′) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 10) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\mathrm{Q}_{10}=\left\{T,T',T'',T'\cup T'',Z\right\}$, სადაც $T\subset T'$, $T\subset T''$, $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing$, $T'\cup T''\subset Z$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned}Q_{10}\vartheta_{XI}=\Big\{&\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\&\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\right\},\ \left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\right\}\Big\}\end{aligned}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{10},Q_{10}\right)\right|=2$ და $\left|\Omega\left(Q_{10}\right)\right|=6$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned}&D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,\breve{D}\right\},\ D_2'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4,\breve{D}\right\},\ D_3'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\&D_4'=\left\{\varnothing,Z_3,Z_6,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_5'=\left\{\varnothing,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_6'=\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\\&D_7'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2\right\},\ D_8'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4,Z_2\right\},\ D_9'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1\right\},\\&D_{10}'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4,Z_1\right\}\end{aligned}$$

მაშინ

$$\begin{aligned}R^*\left(Q_{10}\right)=&R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right)\cup R\left(D_5'\right)\cup R\left(D_6'\right)\cup\\&\cup R\left(D_7'\right)\cup R\left(D_8'\right)\cup R\left(D_9'\right)\cup R\left(D_{10}'\right)\end{aligned}.\qquad\ldots(1)$$

(იხ. განმარტება 1.9).

ლემა 8.19. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned}R^*\left(Q_{10}\right)=&\sum_{i=1}^{4}R\left(D_i'\right)-\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|-\\&-\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|-\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|\end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.24-დან.

ლემა 8.20. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|=5\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|=5\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_5'\right)\right|=5\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$
$$\left|R\left(D_4'\right)\cap R\left(D_6'\right)\right|=5\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.25-დან.

ლემა 8.21. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_{10}\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 10) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}R^*\left(Q_{10}\right)=&\,10\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+10\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+10\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&-5\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\&-5\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_6\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\&-5\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\&-5\cdot 2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|Z_4\setminus Z_1\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

დამტკიცება.მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.27 -დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7=\varnothing$ და განვიხილავთ მხოლოდ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია მოცემულ შემთხვევაში $m_0=5$.

$\mathbf{k}'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 11) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,T,\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$. D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება

$$Q_{11}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{11},Q_{11}\right)\right|=2$ და $\left|\Omega\left(Q_{11}\right)\right|=2$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},D_2'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},$$
$$D_3'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\},\ D_4'=\left\{\varnothing,Z_5,Z_6,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}.$$

მაშინ მივიღებთ

$$R^*\left(Q_{11}\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right).\ldots(1)$$

(იხ.განმარტება 1.9).

ლემა 8.22. ვთქვათ $D=\left\{Z_7,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,8\right)$ და $Z_7=\varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*\left(Q_{11}\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 11) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right|=&\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|=\\&+4\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+4\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(6^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-5^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 6^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

დამტკიცება. მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.28-დან, თუ გავითვალიწინებთ, რომ $Z_7=\varnothing$.

I') ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 12) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\left\{T,T',T'',T'\cup T'',T''',T'\cup T''\cup T'''\right\}$, სადაც $T'\setminus T''\neq\varnothing$, $T''\setminus T'\neq\varnothing,\left(T'\cup T''\right)\setminus T'''\neq\varnothing$, $T'''\setminus\left(T'\cup T''\right)\neq\varnothing$. D ნახევარმესერის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$Q_{12}\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\},\left\{\varnothing,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{12},Q_{12}\right)\right|=1$ და $\left|\Omega\left(Q_{12}\right)\right|=4$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\right\},D_2'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},D_3'=\left\{\varnothing,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$$

მაშინ

$$R^*(Q_{12}) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \ldots (1)$$

(იხ. განმარტება 1.9).

ლემა 8.23. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7 = \varnothing$. მაშინ სამართლია შემდეგი ტოლობა

$$R^*(Q_{12}) = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| + \left|R(D_3')\right| - \left|R(D_2') \cap R(D_3')\right|$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 7.28-დან.

ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 8.24. ვთქვათ $D_2' = \{\varnothing, Z_6, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$ და $D_3' = \{\varnothing, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$\left|R(D_2') \cap R(D_3')\right| = 4 \cdot 2^{\left|(Z_4 \setminus (Z_6 \cup Z_3))\right|} \cdot \left(2^{\left|(Z_6 \setminus Z_3)\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამარლიანობა გამომდინარეოობს ლემა 7.29-დან.

დამტკიცება. 8.25. ვთქვათ $D = \{Z_7, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,8)$ და $Z_7 = \varnothing$. თუ X სასრული სიმრავლეა და $R^*(Q_{12})$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 8.1-ის 12) პირობას, მაშინ

$$\begin{aligned} R^*(Q_{12}) = {} & 3 \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_5 \setminus Z_6\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|Z_3 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus Z_1\right|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & + 3 \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_4 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ & - 3 \cdot 2^{\left|Z_4 \setminus (Z_6 \cup Z_3)\right|} \left(2^{\left|Z_6 \setminus Z_3\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|Z_3 \setminus Z_2\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 6^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} \end{aligned}$$

დამტკიცება: მოცემული ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ლემა 7.30-დან, თუ დავუშვებთ, რომ $Z_7 = \varnothing$ და განვიხილავთ იმ ქვენახევარმესერებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელს. ცხადია მოცემულ შემთხვევაში $m_0 = 3$.

$\mathbf{m}'$) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 13) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება $Q_{13}\vartheta_{XI} = \{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$. ადვილი დასანახია, რომ $|\Phi(Q_{13}, Q_{13})| = 1$ და $|\Omega(Q_{13})| = 1$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$D_1' = \{\varnothing, Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$$

მაშინ

$$R^*(Q_{13}) = R(D_1'), |R^*(Q_{13})| = |R(D_1')|$$

და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$|R^*(Q_{13})| = \left(2^{|Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|(Z_3 \cap Z_2) \setminus Z_5|} \cdot \left(3^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 2^{|Z_4 \setminus Z_3|}\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(4^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 3^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|};$$

n') ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 14) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\{\varnothing, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, D ნახევარმესერის განმარტების თანახმადგვექნება $Q_{14}\vartheta_{XI} = \{\varnothing, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$. ადვილი დასანახია, რომ $|\Phi(Q_{14}, Q_{14})| = 4$ და $|\Omega(Q_{14})| = 1$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$D_1' = \{\varnothing, Z_6, Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$$

მაშინ

$$R^*(Q_{14}) = R(D_1'), |R^*(Q_{14})| = |R(D_1')|$$

და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$|R^*(Q_{14})| = \left(2^{|Z_6 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_5 \setminus Z_6|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_3 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(7^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 6^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 7^{|X \setminus \breve{D}|};$$

$\mathbf{o}'$) ვთქვათ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 15) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\{\varnothing, Z_6, Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, D ნახევარმესერის

განმარტების თანახმად გვექნება $Q_{15}\vartheta_{XI}=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{15},Q_{15}\right)\right|=4$ და $\left|\Omega\left(Q_{15}\right)\right|=1$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$$

მაშინ

$$R^*\left(Q_{15}\right)=R\left(D_1'\right),\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|\left(Z_1\cap Z_2\right)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-4^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 7^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

p$'$) ვთქვათ $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის α ბინარული მიმართება აკმაყოფილებს თეორემა 8.1-ის 16) პირობას. მოცემულ შემთხვევაში $\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, D ნახევარმესერის განმარტების თანახმად გვექნება $Q_{16}\vartheta_{XI}=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$. ადვილი დასანახია, რომ $\left|\Phi\left(Q_{16},Q_{16}\right)\right|=1$ და $\left|\Omega\left(Q_{16}\right)\right|=1$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$D_1'=\left\{\varnothing,Z_6,Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$$

მაშინ

$$R^*\left(Q_{16}\right)=R\left(D_1'\right),\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|$$

და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_6\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|\left(Z_3\cap Z_2\right)\setminus Z_4\right|}\cdot\left(2^{\left|Z_5\setminus Z_6\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(5^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-4^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 8^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

დავუშვათ, რომ

$$\begin{aligned}r_1=&\left|R^*\left(Q_1\right)\right|+\left|R^*\left(Q_2\right)\right|+\left|R^*\left(Q_3\right)\right|+\left|R^*\left(Q_4\right)\right|+\left|R^*\left(Q_5\right)\right|+\left|R^*\left(Q_6\right)\right|+\\&+\left|R^*\left(Q_7\right)\right|+\left|R^*\left(Q_8\right)\right|+\left|R^*\left(Q_9\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{10}\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{11}\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{12}\right)\right|+\\&+\left|R^*\left(Q_{13}\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{14}\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{15}\right)\right|+\left|R^*\left(Q_{16}\right)\right|\end{aligned}$$

თეორემა 8.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,8)$ და $Z_7=\varnothing$.თუ X სასრულო სიმრავლეა და R_D არის $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარულ ელემენტთა სიმრავლე, მაშინ $|R_D|=r_1$.

დამტკიცება: მოცემული თეორემის სამართლიანოა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 8.1-დან.

მაგალითი 8.1. ვთქვათ $X=\{1,2,3,4\}$, მაშინ $\breve{D}=\{1,2,3,4\}$, $Z_1=\{2,3,4\}$, $Z_2=\{1,3,4\}$, $Z_3=\{2,4\}$, $Z_4=\{3,4\}$, $Z_5=\{4\}$ $Z_6=\{3\}$, $Z_7=\{\varnothing\}$ და რეგულარული ელემენტების რაოდენობა შესაბამისად ტოლი იქნება $|R_D|=1550$.

ლიტერატურა

1. Avaliani Z., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, $223-224$.
2. Avaliani Z., The idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, $440-442$.
3. Avaliani Z., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattice of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 2, 2002, $254-255$.
4. Avaliani Z., The number of regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $472-473$.
5. Avaliani Z., Maximal subgroups of a class of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 103.
6. Avaliani Z., Sh. Makharadze, Maximal subgroups of some classes of semigroups of binary relations. Georgian Math J., 11, no. 2, 2004, $203-207$.
7. Avaliani Z., Formulas for Calculation of Regular Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,5)$. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 211, Issue 1, November 2015, pp. 3-12.
8. Clifford A., Preston G., Algebraic theory of semigroups. Mir, Moscow, 1972 (traslated from English).
9. Clifford A.H., Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set. Czechoslovak Math. J., 20, no. 95, 1970, $303-314$.
10. Devadze Kh. M., Generating sets of some subsemigroups of the semigroup of all binary relations in a finite set. Proc. A.I. Hertzen Leningrad State Polytechn.Inst., 387, 1968, $92-100$ (in Russian).
11. Devadze Kh.M., A semigroup generated by the set of all equivalence relations in a finite set. XIth All-Union Algebraic Colloquium, Abstracts of Reports, 1971, Kishinev. $193-194$ (in Russian).
12. Devadez Kh.M., Generating sets of the semigroup of all binary relations in a finite set. Doklady AN BSSR, 12, no. 9, 1968, $765-768$ (in Russian).
13. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Istanbul, , 2013, – (in English). www.kriteryayinvery.com info@kriteryayinevy.com kriteryayin@gmail.com (Monograph).
14. Diasamidze Ya.I., On idempotent binary relations. XIIth All-Union Algebraic Collo-quium, Sverdlovsk, part II, 1973 (in Russian).
15. Diasamidze Ya.I., Some semigroups generated by idempotent binary relations. In the collection: Sovremennaya Algebra, no.3, 1975, Leningrad, $36-51$ (in Russian).
16. Diasamidze Ya.I., Green relations on the semigroup generated by all diagonal idempotent relations. All-Union Algebraic Symposium, Gomel, part I, 1975 (in Russian).

17. Diasamidze Ya.I. On the semigroup of binary relations. In the collection: Gertsenovsk. Chteniya, Matematika, 1976, Leningrad, $5-8$ (in Russian).

18. Diasamidze Ya.I., Green relations on the semigroup generated by all almost diagonal idempotent relations. In the collection of works: Sovrem Algebra, no. 4, 1976, Leningrad, $57-65$.

19. Diasamidze Ya.I., Description of all minimal left (right) idempotent divisors of almost diagonal relations. In the collection: Sovrem. Algebra, no. 5, 1976, Leningrad, $40-46$ (in Russian).

20. Diasamidze Ya.I., On reducible and irreducible binary relations. Xth Conf. Mathem. Higher Educat. Establishments Georgian SSR, Abstracts of Reports, Telavi, 1983 (in Russian).

21. Diasamidze Ya.I., Construction of idempotent binary relations. 45th Scientific Conference. Abstracts of Reports, Batumi, 1988 (in Russian).

22. Diasamidze Ya.I., On unilateral zeros of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 5, 1990, $600-604$ (in Russian).

23. Diasamidze Ya.I., On unilateral units of subsets of the semigroup of binary relations. Ukrainian Math. J., 42, no. 8, 1990, 1026-1031 (in Russian).

24. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Irreducible generating sets of some idempotently generated subsemigroups of the semigroup of all binary relations. Batumi, 1996, $1-31$ (in Russian).

25. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, $39-42$.

26. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., A general characterization of semigroups the class $\Sigma(X,2)$. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 2, 1999, $198-200$.

27. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 3, 1999, $376-378$.

28. Diasamidze Ya.I., Complete semigroups of binary relations. Ajara Publ. House, Batumi, 2000, $1-176$ (in Russian).

29. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., Complete semigroups of binary relations defined by nodal $X-$semilattices of unions. Proc. Shota Rustaveli Batumi State Univ., Batumi, 2001, $28-49$.

30. Diasamidze Ya., Divisibility of elements in complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 2, 2001, $225-227$.

31. Diasamidze Ya., Right units and idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 164, no. 3, 2001, $443-446$.

32. Diasamidze Ya., Maximal submonoids and maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. IIIrd Congress of Mathematicians of Georgia, Tbilisi, 2001.

33. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations with unique right units. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 1, 2001, $18-21$.

34. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Complete semigroups of binary relations defined by elementary and nodal $X-$semilattices of unions. Itogi Nauki I Tekjniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, Algebra, 81, no. 19, 2001 (in Russian).

35. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by sets of nonchainwise pairs. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $477-479$.

36. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by sets of pairwise nonintersecting sets. Bull. Georgian Acad, Sci., 166, no. 1, 2002, $23-26$.

37. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relations defined by complete $X-$semilattices generated by chains. Bull, Georgian Acad. Sci., 166, no. 2, 2002.

38. Diasamidze Ya., To the theory of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, $1-15$.

39. Diasamidze Ya., Right units in the semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 128, 2002, $17-36$.

40. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Complete semigroups of binary rekations defined by elementary and nodal $X-$semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, 111, no.1, 2002, Plenum Publ. Corp., New York, $3171-3226$.

41. Diasamidze Ya.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element $X-$chains. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).

42. Diasamidze Ya.I., Complete semigroups of binary relations. Itogi Nauki I Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Apllications. Thematic Surveys, 98, 2002 (in Russian).

43. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite $X-$chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $107-108$.

44. Diasamidze Ya.I., Irreducible elements of the semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $109-110$.

45. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $21-38$.

46. Diasamidze Ya.I., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations defined by three-element $X-$chains. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, 2003, $4320-4350$.

47. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, 117, no. 4, 2003, Plenum Publ. Corp., New York, $4271-4319$.

48. Diasamidze Ya.I., Diasamidze I., Complete semigroups of binary relations defined by finite $X-$chains. Proc. Batumi State Univ., no. 4, 2003, $3-36$.

49. Diasamidze Il., Semigroups $B_X(D)$ defined by finite $X-$chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $105-106$.

50. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 2, 2004, $263-266$.

51. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., Description of the class $\Sigma(\qquad)$ (m is a finite number). Bull. Georgian Acad. Sci., 169, no. 3, 2004, $463-465$.

52. Diasamidze Ya.I., Makharadze Sh.I., Classes of complete semigroups of binary relations. International Algebraic Conference. Abstracts of Reports, Moscow, 2004, $44-45$.

53. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$semilattices of unions. Modern Mathematics and its Applications, Algebra and Geometry, v. 27, Tbilisim 2005, $46-94$.

54. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Givradze O., On finite $X-$ semilattices of unions. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 141, № 4, 2007, 1134-1181.

55. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of all Idempotents is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 1 (175), no. 4, 2007, $31-35$.

56. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Diasamidze Il., Idempotents and regular elements of complete semigroups of binary relations. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 153, no. 4, 2008, $481-499$.

57. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., On $XI-$Semilattices of Unions. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2 , no. 1, 2008, $16-24$.

58. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Diasamidze Il., Complete Semigroups of Binary Relations whose Set of Regular Elements is a Semigroup. Bull. Georg. Nat. Acad. Sci., 2, no. 2, 2008, $9-15$.

59. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroup of binary relations. Fundamental and application mathematic. 2008, 14, no. 8, 73-99.

60. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete Semigroups of Binary Relations defined by $X-$Semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, New York, Vol. 166, no. 5, 2010, $615-633$.

61. Diasamidze Ya., The property of right units of complete semigroups of binary relations defined finite $XI-$ semilattices of unions. Procedings of the international conference “Modern algebra and its applications” . Batumi, Georgia, 2010, $38-40$.

62. Diasamidze Ya., Erdogan A., Chimen N., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2010, $41-55$.
63. Diasamidze Ya., makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations defined finite $XI-$semilattices of unions. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2010, $56-58$.
64. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations. Sputnik +, Moscow, 2010, – (in Russian).
65. Diasamidze Ya., Complete $XI-$semilattices of unions. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2011, $48-52$.
66. Diasamidze Ya., Erdogan A., Chimen N., Regular elements of complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class $\Sigma_6(X,7)$ Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2011, $53-68$.
67. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Right units and there number of the complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class nets. Procedings of the international conference "Modern algebra and its applications". Batumi, Georgia, 2011, $69-72$.
68. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Partenadze G., Idempotent elements of complete semigroups of binary relations defined by the finite $X-$semilattices of the rooted tree class. Abstracts II international conference. 2011, Batumi, Georgia, $81-82$.
69. Diasamidze Ya. and Bakuridze A. On Some Properties of Regular Elements of Complete Semigroups Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$. (IJESIT) International Journal of Enginering science and Inovate Technology, Vol. 4, Issue 4, july 2015, pp. 8-15. http://www.ijsit.com./archive/23/volume-4issue-4-july.2015.html
70. Diasamidze Ya, Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $Z-$Elementary $X-$Semilattice of Unions. Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 11 (23), No. 1, (2015),17-35.
71. Diasamidze Yasha, Erdogan Ali, Aydin Neşet, Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class Lower Icomplete Nets. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 93, No. 4 2014, 549-566.
72. Diasamidze Yasha, Albayrak Bariş, Aydin Neşet, Regular Elements of the Complete Semigroups of Binary Relations of the Class $\Sigma_7(X,8)$. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 86, No. 1 2013, 199-216.
73. Diasamidze Ya. and Bakuridze A. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_4(X,8)$ and their Calculation Formulas, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 165 (2014), 41-66.
74. Diasamidze Ya. and A. Bakuridze. On Idempotent Elements of the Complete Semigroups of Binary RelationsDefined by Semilattices of Unions, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 166 (2014), 9-30.
75. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Rokva N., Right Units in Complete Semigroups of Binary Relations. Journal of Mathematical Sciences. September 2013, Volume 193, Issue 3, pp 401-403.
76. Diasamidze Yasha, Tsinaridze Nino. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of The Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$ and their calculation Formulas. International Journal of Pure Mathematical Sciences ISSN: 2297-6205. Vol. 16, pp 1-23.
77. Diasamidze Yasha, Tsinaridze Nino, Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$ -*I.* Applied Mathematics, 2016, 7, 867-893,
78. Diasamidze Yasha, Tsinaridze Nino, Aidn Neset, Erdogan Ali. Regular Elements of $B_X(D)$ defined by the Class $\Sigma_1(X,10)$ -*II.* Applied Mathematics, 2016, 7, 894-907,

79. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\sum_1(X,4)$. Bull Georgian Acad. Sci., 167, no. 1, 2003, $43-46$.

80. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_X(D)$ defined by a semilattice of the class $\sum_1(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $117-120$.

81. Givradze O., The number of equivalences on a finite set. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $121-122$.

82. Givradze Omar. Irreducible Generating Sets of Complete Semigroups of Unions. Journal of Mathematical Sciences: March 2014, Vol. 197, Issue 6, pp 755-760.

83. Khiladze D., Semigroups $BX(D)$ defined by semilattices of the classes $\sum_3(X,4)$ and $\sum_4(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $137-138$.

84. Kuratovski K., Mostovski A., Theory of sets. Mir, Moscow, 1970 (in Russian).

85. Kenneth D. Magill, Jr., Automorphisms of the semigroup of all relations on a set. Candian Math. Bull., 9, no. 1, 1966, $73-77$.

86. Makharadze Sh.I., Divisibility, Green relations and regular elements of the semigroup $\theta_X^{(r)}(\alpha)$. Batumi Univ. Press, Batumi, 1997, $1-23$.

87. Makharadze Sh., On the theory of the semigroup of binary relations. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 2, 1999, $205-208$.

88. Makharadze Sh., Maximal idempotent groups in the binary relation semigroup. Bull. Georgian Acad. Sci., 159, no. 3, 1999, $373-375$.

89. Makharadz Sh., Remarks on the theory of binary relation semigroup. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 121, 1999, $109-116$.

90. Makharadze Sh.I., Maximal idempotent semigroups from $\theta_X^{(r)}(\omega_{X_1X_2})$. Proc. Batumi State Univ., no. 2, Batumi, 1998, $33-38$.

91. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Ajara, Batumi, 2001, $1-153$.

92. Makharadze Sh., Semigroups of binary relations with right units. International Congress of Mathematicians, Abstracts of Short Communications and Poster Sessions, Beijing 2002, 27.

93. Makharadze Sh., Diasamidze Il., Characteristic sets of complete $X-$semilattices of unions. Bull. Georgian Acad. Sci., 165, no. 3, 2002, $474-476$.

94. Makharadze Sh., Regular elements of semigroups $B_X(D)$ defined by generalized elementary $X-$semilattices. Intellect, periodic scientific journal, no. 3(14), 2002, Tbilisi, $21-26$.

95. Makharadze Sh., Maximal subgroups of some classes of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $143-144$.

96. Makharadze Sh., Regular elements of the semigroup $B_X(D)$ determined by the generalized elementary $X-$semilattices. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 131, 2003, $145-147$.

97. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Itogi Nauki i Tekhniki. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).

98. Makharadze Sh.I., Semigroups of binary relations with right units. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no. 4, 2003, $4351-4392$.

99. Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Modern Mathematics and its Applications. Thematical Surveys, 98, 2002 (in Russian).

100. Makharadze Sh.I., Diasamidze I.Ya., One class of complete semigroups of binary relations. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Corp., New York, 117, no. 4, 2003, $4393-4424$.

101. Makharadze Sh., Bakuridze A., Complete semigroups of binary relations defined by semilattices of the class X. Bull. Georgian Acad. Sci., 170, no. 3, 2004, $462-465$.

102. Makharadze Shota, Aydin Neşet, Erdogan Ali. Complete Semigroups of Binary Relations Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_1(X,10)$. Applied Mathematics, 2015, 6, 274-294.

103. Partenadze G., Semigroups $B_X(D)$ defined by complete $X-$semilattices of the class $\Sigma_1(X,6)$. Proc. A.Razmadze Math. Inst., 131, 2003, 116.
104. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 183, 1958, $251-263$ (in Russian).
105. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the semigroup of all reflective binary relations. Trans. A.I. Herzen Leningrad State Polytechn. Inst., 1958, $265-269$ (in Russian).
106. Zaretskii K. A., Representation of ordered semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 6, 1959, $48-50$ (in Russian).
107. Zaretskii K. A., Regular elements of the semigroup of binary relations. Uspekhi Mat, Nauk, 17, no. 3, 1962, $177-189$ (in Russian).
108. Zaretskii K. A., A semigroup of binary relations. Matem. Sbornik, 61, no.3, 1963, $291-305$ (in Russian).
109. Zaretskii K. A., A semigroup of completely effective binary relations. In the collection: Theory of Semigroups and Its Applications, I, 1965, Saratov University Press, 1965, $238-250$ (in Russian).
110. Zaretskii K. A., On the ideals of semigroups. Uspekhi Mat. Nauk, 14, no. 6, 1959, $173-174$ (in Russian).
111. Zaretskii K. A., Abstract characterization of the class of semigroups of partially reflective binary relations. Sibirsk. Mat. Zh., 8, no. 6, 1967 (in Russian).
112. Zaretskii K. A., On monogenic semigroups of binary relations. Izv. Vish. Uchebn. Zaved. Matematika, 131, no. 4, 1973, $15-20$ (in Russian).
113. Zareckii K.A., Maximal submonoids of the semigroup of binary relations. Semigroup Forum, 9, no. 5, 1974, $196-208$.
114. Zaretskii K. A., On congruences on the semigroup of binary relations. Associative Actions. Leningrad, 1983, $30-39$ (in Russian).
115. Zaretskii K. A., Maximal regular subsemigroups of the semigroup of binary relations. Associative Actions, Leningrad, 1983, $40-46$.
116. Zaretskii K. A., Equiprojective idempotent binary relations. Teoriya polugrupp i ee Prilozheniya, 5, Saratov Univ. Press, 1985, $29-31$ (in Russian).
117. Zaretskii K. A., On partial congruences on the semigroup of binary relations. Teoriya polugrupp i ee Prilozheniya, 7, 1984, Saratov Univ. Press, $16-23$ (in Russian).
118. Zaretskii K. A., Lattices of the sections of binary relations. Uporyadoch. Mnozhestva i Reshetki, 9, 1986, Saratov Univ. Press, $24-33$ (in Russian).
119. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 \neq \varnothing$. IJISET – International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology, Vol. 3 Issue 1, January 2016, 162-171.
120. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota. Regular Elements of the Complete Semigroups $B_X(D)$ of Binary Relations of the Class $\Sigma_2(X,8)$. Applied Mathematics, 2015, 6, 447-455.
121. Tsinaridze Nino. Idempotent Elements of Semigroups $B_X(D)$ defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$, when $Z_7 \cap Z_6 = \varnothing$. Gen. Math. Notes. Vol. 27, No. 2, April 2015, pp. 17-36.
122. Tsinaridze Nino, Makharadze Shota, Fartenadze Guladi. Regular Elements of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$ and Their Calculation Formulas. Applied Mathematics, 2015, 6, 2257-2278.
123. Tsinaridze Nino, Diasamidze Yasha. Maximal Subcroups of the Semigroup $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\Sigma_2(X,8)$. IJESIT- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology, Vol. 4, Issue 6, November 2015, pp. 61-74. http://www.ijesit.com/archive/25/volume-4-issue-6november-2015.html;

124. Tsinaridze Nino. Subsemilattice of a Semilattice of Class $\Sigma_2(X,8)$. Journal of Mathematical Sciences Vol. 191, No. 6, june, 2013, pp. 871-875.

სადოქტორო ნაშრომში მიღებული შედეგები ასახულია

შემდეგ სამეცნიერო შრომებში

1. Tavdgiridze Giuli. Maximal Subgroups of the semigroup $B_X(D)$ defined by the Semilattices of the class $\sum_3(X,8)$. Gen. Math. Notes, Vol. 27, No. 1, March 2015, pp. 69-89 ISSN 2219-7184; http://www.geman.in http://www.geman.in/yahoo_site_admin/assets/docs/7_GMN-7722-V27N1.149222649.pdf
2. Tavdgiridze Giuli and Disamidze Yasha. Some Regular Elements, Idempotents and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined by X- Semilattices which is Union of a Chain and Two Rhombus. Gen. Math. Notes, Vol. 26, No. 1, January 2015, pp. 84-101 ISSN 2219-7184; http://www.geman.in http://www.geman.in/yahoo_site_admin/assets/docs/10_GMN-7252-V26N1.91212123.pdf
3. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha. Regular Elements and Right Units of Semigroup $B_X(D)$ Defined Semilattice D for Which $V(D,\alpha)=Q=\sum_3(X,8)$, Applied Mathematics, 2015, 6, pp373-381. http://www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2015.62035
4. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha and Givradze Omari. Idempotent Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\sum_3(X,8)$ When $Z_7 \neq \varnothing$. Applied Mathematics, 2016, 7, pp193-218. http://www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.73019
5. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha and Givradze Omari. Idempotent Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\sum_3(X,8)$ When $Z_7 = \varnothing$. Applied Mathematics, 2016, 7, pp953-966. http://www.scirp.org/journal/am http://dx.doi.org/10.4236/am.2016.79085
6. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha. Regular Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class When $\sum_3(X,8)$ $Z_7 \neq \varnothing$. IJESIT- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology. http://www.ijiset.com. http://ijiset.com/vol2/v2s11/IJISET_V2_I11_103.pdf
7. Tavdgiridze Giuli, Diasamidze Yasha. Regular Elements of the Semigroups $B_X(D)$ Defined by Semilattices of the Class $\sum_3(X,8)$ When $Z_7 = \varnothing$. IJESIT- International Journal of Engineering Science and Innovative Technology,