ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო

უნივერსიტეტი

ავტორი: თამთა სიჭინავა

თეორემები ზოგადი ორთოგონალური მწკრივების კრებადობის შესახებ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი
მათემატიკის დოქტორი
თენგიზ კოპალიანი

თბილისი

2019

სარჩევი

ანოტაცია 3
შესავალი 4
§1. ორთოგონალური მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობა 9
§2. ორთოგონალური მწკრივების თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობა 23
§3. თითქმის ყველგან კრებადობის ქვემიმდევრობები 32
§4. ინტეგრირებული ორთონორმირებული სისტემის თვისებები........................... 37
დასკვნა 42
გამოყენებული ლიტერატურა 43

ანოტაცია

ნაშრომში შესწავლილია ზოგადი ორთონორმირებული სისტემისთვის თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხები.სახელდობრ, მენშოვ-რადემახერისა და კაჩმაჟის თეორემები. განხილულია აგრეთვე თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობის შესახებ მენშოვ-მარცინკევიჩის და ტანდორის თეორემები.

Summery

In present paper we investigate almost everywhere convergence for general orthogonal system.Indeed theorems of Men'shov-Rademacher and Kaczmarz.

We also investigate unconditional convergence almost everywhere: Theorems of Men’shov Marcinkiewicz and Tandori.

შესავალი

სამაგისტრო ნაშრომი ეხება ზოგადი ორთონორმირებული მწკრივების კრებადობის საკითხებს. აღნიშნული მიმართულება ფუნქციათა თეორიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა. მისი ჩამოყალიბება არსებითად ეფუძნება პრობლემატიკას, რომელიც იკვლევს კლასიკური ტრიგონომეტრიული სისტემის თვისებებს. აღმოჩდა რომ მთელი რიგი თვისებებისა, რომელიც გააჩნია ტრიგონომეტრიულ სისტემას ატარებს ზოგად ხასიათს; ის სამართლიანია ორთონორმირებული სისტემების ფართო კლასისთვისაც. ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დებულება ფუნქციათა თეორიაში არის კარლესონის თეორემა $L^2[-\pi,\pi]$ კლასის ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის შესახებ.

თეორემა (კარლესონი) ვთქვათ $f\in L^2[-\pi,\pi]$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს $\sum_{k\in Z} a_k(f)e^{ikx}$ მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია $[-\pi,\pi]$ სიმრავლეზე.

აღნიშნული პრობლემატიკის სირთულეზე მიუთითებს ის, რომ კარლესონის თეორემამდე ძალზე ცოტა იყო ცნობილი აღნიშნული მიმართულებით, იმ შემთხვევაშიც კი თუ განვიხილავდით მხოლოდ უწყვეტ ფუნქციათა კლასს. კერძოდ, არ იყო ცნობილი პასუხი შემდეგ ბუნებრივ კითხვაზეც კი: ნებისმიერი ფიქსირებული უწყვეტი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა $[-\pi,\pi]$ სიმრავლის ერთი წერტილი მაინც, სადაც ფუნქციის ფურიეს მწკრივი იქნებოდა კრებადი. კარლესონის თეორემამდე აღნიშნული მიმართულებით კოლმოგოროვის, სელივესტროვის და პლესნერის მიერ მიღებულ იქნა შემდეგი ფუნდამენტალური ფაქტი

თეორემა (კოლმოგოროვი, სელივესტროვი, პლესნერი). $[-\pi,\pi]$ სიმრავლეზე

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობისთვის საკმარისია შესრულდეს პირობა

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\ln n<\infty\,.$$

აღმოჩნდა, რომ ეს ფუნდამენტალური ფაქტი გარკვეული ფორმით სამართლიანია ზოგად შემთხვევაში. სახელდობრ, მენშოვის და რადემახერის მიერ დამტკიცებულ იქნა შემდეგი ფუნდამენტალური თეორემა

თეორემა (მენშოვი, რადემახერი). ვთქვათ $\Phi=\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა განსაზღვრული $(0;1)$ სიმრავლეზე. მაშინ შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\,,$$

თითქმის ყველგან კრებადია, თუ კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 log_2^2(n+1) < \infty. \qquad (1)$$

უფრო მეტიც, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|S_\Phi^*(a,x)\|_2 \le CL^{1/2}$$

სადაც C აბსოლუტურად მუდმივია, ხოლო $S_\Phi^*(a,x) = \sup_{1\le N<\propto} \left|\sum_{i=1}^{N} a_i\, \varphi_i(x)\right|$.

სამაგისტრო ნაშრომის პირველ თავში განხილული გვაქვს მენშოვ-რადემახერის თეორემის დამტკიცება და მასთან დაკავშირებული პრობლემატიკა. სახელდობრ, შესწავლილი გვაქვს გარკვეული ტიპის შეფასებები, რომელთაც ზოგადი ხასიათი აქვთ და ხშირად გამოიყენება ზოგადი ორთონორმირებული მწკრივების თეორიაში.

ბუნებრივია ისმის კითხვა თუ რამდენად არსებითია (2) პირობაში $ln^2 n$ მამრავლების რიგი (აღნიშნულ მამრავლებს მოცემული ორთონორმირებული სისტემისათვის ვეილის მამრავლებს უწოდებენ). მენშოვის მიერ დამტკიცებულ იქნა შემდეგი თეორემა

თეორემა (მენშოვი). არსებობს ორთონორმირებული სისტემა $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$ ისეთი, რომ ყოველი $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 = \omega_1 \le \omega_2 \le \cdots$ და $\omega_n = o(\log_2^2 \mathrm{n})$, $n \to \infty$ მიმდევრობისთვის მოიძებნება თითქმის ყველგან განშლადი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)\,,$$

რომლის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty.$$

ზემოთ მოყვანილ თეორემებში ვეილის მამრავლები არსებითადაა დამოკიდებული მოცემული ორთონორმირებული სისტემის შესაბამისი ლებეგის ფუნქციების ყოფაქცევასთან, სახელდობრ, კაჩმაჟის მიერ დამტკიცებულ იქნა შემდეგი თეორემა

თეორემა (კაჩმაჟი). ვთქვათ $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემაა და $L_n(t)$, $t \in (0;1)$, $n = 1,2,\ldots$ ლებეგის ფუნქციებია. თუ რაიმე $E \subset (0;1)$ სიმრავლის თითქმის ყველა t წერტილისთვის სამართლიანია თანაფარდობა

$L_n(t) \le C\lambda_n$, $n = 1,2,\ldots$

სადაც $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$,

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს (1) მწკრივის თ.ყ. კრებადობა E სიმრავლეზე.

სამაგისტრო ნაშრომის მეორე თავში დამუშავებულია ზოგადი ორთონორმირებული სისტემებისათვის თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობის პრობლემატიკა. თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობის შესწავლის დროს არსებით ამოცანას წარმოადგენს ორთონორმირებული სისტემის ნებისმიერ გადანაცვლებასთან დაკავშირებული საკითხები.

თეორემა (ორლიჩი). თუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \ \ \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \ , \ \ x \in (0;1)$$

მწკრივის კოეფიციენტებისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=v_k+1}^{v_{k+1}} a_n^2 log_2^2 n \right]^{1/2} < \infty \, , \quad v_k = 2^{2^k}, \ k = 0,1, \dots,$$

მაშინ მოცემული მწკრივი უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან.

ტანდორის მიერ დამტკიცებული იყო თეორემა.

თეორემა (ტანდორი). არსებობს $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირე-ბული სისტემა ისეთი, რომ ნებისმიერი $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty \qquad (b_k > 0)$$

მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^k v_k} \sum_{n=v_k+1}^{v_{k+1}} \varphi_n(x)$$

სადაც $v_k = 2^{2^k}$, განშლადია თითქმის ყველგან $(0;1)$-ზე წევრთა გარკვეული გადანაცვლების შემდეგ.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემისთვის $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ მწკრივი ზომით კრებადია, ამიტომ მოიძებნება ნომერთა $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ მითითებული

მწკრივის კერძო ჯამების S_{N_k} მიმდევრობა თ.ყ. კრებადია. აღნიშნული ნომერთა მიმდევრობა ცხადია დამოკიდებულია $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ კოეფიციენტებზე. ბუნებრივია დაისვას კითხვა, შესაძლებელია თუ არა მოიძებნოს $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, რომელიც არ იქნება დამოკიდებული a_n კოეფიციენტზე. ნაშრომის მესამე თავში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა

ნებისმიერი $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემისათვის მოიძებნება ნატურალურ რიცხვთა ისეთი ზრდადი $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, სახის ნებისმიერი $S_{N_k}(x) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n\varphi_n(x)$, $k = 1,2,\ldots$, მწკრივისთვის მიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველგან (0;1)-ზე და სამართლიანია უტოლობა

$$\left\| \sup_{1\le q<\infty} \left|S_{N_q}(x)\right| \right\|_2 \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}.$$

სამაგისტრო ნაშრომის მეოთხე თავში შესწავლილია ინტეგრირებული სისტემების ზოგიერთი თვისება. შევნიშნოთ, რომ საკითხები ორთონორმირებული მწკრივების თანაბარი კრებადობის შესახებ, რომლებიც ბუნებრივად ჩნდებოდნენ ტრიგონომეტრიული და სხვა კლასიკური სისტემების შესწავლის დროს, ზოგადი ორთონორმირებული სისტემებისთვის საბოლოოდ ნაკლები შინაარსის მატარებელია. საქმე იმაშია, რომ ორთონორმირებული სისტემების ფუნქციები შეიძლება იყვნენ საკმაოდ „ცუდები" , მაგალითად არ იყვნენ შემოსაზღვრულები. თუ განვიხილავთ ფუნქციათა სისტემას

$$F_n(y) = \int_0^y \varphi_n(x)dx\,, \quad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} - \text{ო. ნ. ს.} \quad \big(x, y \in (0;1)\big), \qquad (2)$$

მაშინ აღმოჩნდება, რომ ასეთი სისტემებით შესაძლებელია მივიღოთ ზოგადი ხასიათის არატრივიალური თეორემები მწკრივთა თანაბარი კრებადობის შესახებ. კერძოდ აღმოჩნდება, რომ (2) სახის ნებისმიერი სისტემისათვის და თითქმის ყველგან $t \in (0;1)$-თვის თანაბრად კრებადია

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)F_n(y); \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)F_n(y),$$

მწკრივები, სადაც $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ რადემახერის სისტემაა, ხოლო $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული ფუნქციებისაგან შემდგარი ორთონორმირებული სისტემაა. სტეჩკინის მიერ დამტკიცებული იყო შემდეგი თეორემა

თეორემა (სტეჩკინი). ვთქვათ $\{\eta_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in (0;1)$ ნორმალურად განაწილებული ფუნქციებისაგან შემდგარი ორთონორმირებული სისსტემაა, ხოლო $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემა, მაშინ თ.ყ. $t \in (0;1)$-თვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^y \varphi_n(x)\, dx$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია (y-ის მიმართ) $[0;1]$ სეგმენტზე.

§1. ორთოგონალური მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობა

თეორემა 1. ვთქვათ $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა განსაზღვრული $(0;1)$ სიმრავლეზე. მაშინ შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) , \tag{1}$$

თითქმის ყველგან კრებადია, თუ კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 log_2^2(n+1) < \infty. \tag{2}$$

უფრო მეტიც, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|S_{\Phi}^*(a,x)\|_2 \le CL^{1/2} \tag{3}$$

სადაც C აბსოლუტურად მუდმივია, ხოლო $S_{\Phi}^*(a,x) = \sup_{1\le N<\propto} |\sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi_i(x)|$.

თეორემა 1-ის დამტკიცება ეფუძნება შემდეგ ლემას:

ლემა1. ვთქვათ $\Phi = \{\varphi_n\}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემაა, მაშინ $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ რიცხვთა ნებისმიერი ერთობლიობისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_0^1 \delta^2(x)dx \le K\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\log_2^2(N+1) ,$$

სადაც

$$\delta(x) \coloneqq \max_{1\le j\le N}\left|\sum_{n=1}^{j} a_n\varphi_n(x)\right| ,$$

ხოლო K აბსოლუტურად მუდმივია.

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $N = 2^r, r = 1,2,\dots$ ($a_n = 0$ *როცა* $N < n \le 2^r$ და $2^{r-1} < N < 2^r$). ყოველი j რიცხვისთვის $j \in \{1,2,\dots,2^r\}$ განვიხილოთ მისი ორობითი გაშლა:

$$j = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon_k 2^{r-k}, \qquad \varepsilon_k = \varepsilon_k(j) = 0 \text{ ან } 1 \quad k \in \{0,1,\dots,r\}.$$

ცხადია, რომ ჯამი $\sum_{n=1}^{j} b_n$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sum_{n=1}^{j} b_n = \sum_{k:\varepsilon_k\neq 0}\ \sum_{\sum_{s=0}^{k-1}\varepsilon_s 2^{r-s} < n \le \sum_{s=0}^{k}\varepsilon_s 2^{r-s}} b_n , \tag{4}$$

თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას მივიღებთ, რომ

$$\left|\sum_{n=1}^{l} b_n\right|^2 \le (r+1)\sum_{k:\varepsilon_k\neq 0}\left(\sum_{\sum_{s=0}^{k-1}\varepsilon_s 2^{r-s}<n\le\sum_{s=0}^{k}\varepsilon_s 2^{r-s}} b_n\right)^2 \le (r+1)\sum_{k=0}^{r}\sum_{p=0}^{2^k-1}\left(\sum_{n=p2^{r-k}+1}^{(p+1)2^{r-k}} b_n\right)^2 .$$

ზემოთ მიღებულ უტოლობას თუ გამოვიყენებთ $\left|\sum_{n=1}^{j(x)} a_n\varphi_n(x)\right|$ ჯამის შეფასებისთვის სადაც ფუნქცია $j(x)$ არჩეულია ტოლობით

$$\left|\sum_{n=1}^{j(x)} a_n\varphi_n(x)\right| = \delta(x), \qquad x\epsilon(0,1)$$

მივიღებთ

$$\delta^2(x) \le (r+1)\sum_{k=0}^{r}\sum_{p=0}^{2^k-1}\left(\sum_{n=p2^{r-k}+1}^{(p+1)2^{r-k}} a_n\varphi_n(x)\right)^2 . \tag{5}$$

თუ გავითვალისწინებთ $\{\varphi_n\}$ ორთოგონალობის პირობას, (5) უტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \delta^2(x)dx \le (r+1)\sum_{k=0}^{r}\sum_{n=1}^{N} a_n^2 = (r+1)^2\sum_{n=1}^{N} a_n^2 = (1+\log_2 N)^2\sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 1-ის დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ თითქმის ყველგან $x \in (0,1)$-თვის კრებადია მიმდევრობა

$$S_{2^k}(a,x) = \sum_{n=1}^{2^k} a_n\varphi_n(x), \quad k = 1,2,\dots .$$

შევაფასოთ ფუნქციის $L^2(0,1)$ ნორმა

$$S'(a,x) \coloneqq \sup_{0\le k<\infty}\left|S_{2^k}(a,x)\right| .$$

ვთქვათ

$$\Psi_k(x) \coloneqq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n\varphi_n(x), \qquad k = 0,1\dots ,$$

მაშინ

$$\|\Psi_k\|_2^{\,2} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2$$

და სამართლიანია:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_2^{\,2}\,(k+1)^2 \le 2L .$$

გვექნება

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_1 \le \sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_2(k+1)(k+1)^{-1} \le \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_2{}^2(k+1)^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-2}\right\}^{1/2}$$

$$\le 2L^{1/2} \tag{6}$$

თუ გამოვიყენებთ ლევის თეორემას დავასკვნით, რომ თ.ყ. $x \in (0,1)$-თვის ჯამი $\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k(x)|$ თითქმის ყველგან კრებადია, აქედან გამომდინარე კრებადია $S_{2^k}(a,x)$, $k = 0,1,\dots$ მიმდევრობაც. გარდა ამისა

$$S^{'}(a,x) \le \sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k(x)|, \; x \in (0,1),$$

საიდანაც ვიღებთ:

$$\left\|S^{'}(a,x)\right\|_2 \le \left\|\sum_{k=0}^{\infty}|\Psi_k|\right\|_2 \le \sum_{k=0}^{\infty}\|\Psi_k\|_2 \le 2L^{1/2}. \tag{7}$$

განვიხილოთ ფუნქცია $S^{"}(a,x) := \sup\limits_{0<k<\infty}\delta_k(x)$, სადაც

$$\delta_k(x) := \max_{2^k \le j < 2^{k+1}}\left|\sum_{n=2^k}^{j} a_n\,\varphi_n(x)\right|, \; k = 1,2\dots.$$

ლემა (1)-ის ძალით

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 \delta_k^2(x)dx \le K\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^2\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}a_n^2 \le 2KL \;, \tag{8}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k(x) = 0$, თითქმის ყველგან $x \in (0;1)$ –თვის. თუ გავითვალისწინებთ რომ $S_{2^k}(a,x)$ კრებადია თ.ყ., დავასკვნით რომ (1) მწკრივიც კრებადია თ.ყ. (0,1)-ზე. გარდა ამისა ვინაიდან

$$S_\Phi^*(a,x) \le S^{'}(a,x) + S^{"}(a,x), \quad x \in (0,1) \qquad \text{და} \qquad \left[S^{"}(a,x)\right]^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2(x),$$

(7)-(8) უტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\|S_\Phi^*(a,x)\|_2 \le \left\|S^{'}(a,x)\right\|_2 + \left\|S^{"}(a,x)\right\|_2 \le 2L^{1/2} + (2KL)^{1/2} = CL^{1/2}.$$

თეორემა 1 დამტკიცებულია.

განმარტება 1. $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ რიცხვით მიმდევრობას $1 = \omega_1 \le \omega_2 \le \cdots$, ეწოდება ვეილის მამრავლი $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემისათვის, თუ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\omega_n$ მწკრივიდ კრებადობიდან გამომდინარეობს (1) მწკრივის თ.ყ. კრებადობა.

პირველი თეორემის ძალით მიმდევრობა $\omega_n = \log_2^2(\mathrm{n}+1)$, $n = 1,2 \ldots$, არის ვეილის მამრავლი ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემისათვის თითქმის ყველგან კრებადობისთვის.

თეორემა 2. არსებობს ორთონორმირებული სისტემა $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$ ისეთი, რომ ყოველი $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 = \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots$ და $\omega_n = o(\log_2^2 \mathrm{n})$, $n \to \infty$ მიმდევრობისთვის მოიძებნება თითქმის ყველგან განშლადი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x),$$

რომლის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty. \tag{9}$$

შედეგი 1. არსებობს თითქმის ყველგან განშლადი ორთოგონალური მწკრივი კოეფიციენტებით l^2 სივრციდან.

თეორემა 2-ის დასამტკიცებლად ვიყენებთ შემდეგ ლემას:

ლემა 2. არსებობს მუდმივი $c_0 > 0$ ისეთი, რომ ყოველი $N = 1,2 \ldots$-თვის მოიძებნება $\Psi(N) = \{\psi_k^N\}_{k=1}^{N}, x \in (0,1)$ ორთონორმირებულ ფუნქციათა სისტემა რომლისთვისაც

$$m\left\{x \in (0,1) \colon \max_{1 \leq j \leq N} \left|\sum_{k=1}^{j} \psi_k^N(x)\right| > c_0 N^{\frac{1}{2}} \log_2 N\right\} \geq \frac{1}{4}, \tag{10}$$

გარდა ამისა

$$\psi_k^N(x) \in D_{4N} \quad \text{და} \quad \int_0^1 \psi_k^N(x)dx = 0, \quad k = 1,2 \ldots N. \tag{11}$$

ლემა 2-ის დამტკიცება. დავაფიქსიროთ $N > 1$ და აღვნიშნოთ $\chi(x)$-ით ფუნქცია $\chi(x) = sign(sin 4N\pi x)$, $x \in (0,1)$. თავდაპირველად ფუნქციათა $\Psi(N)$ ერთობლიობა განვსაზღვროთ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ინტერვალზე, ამისათვის დავყოთ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ინტერვალი N თანაბარ ნაწილად

$$I_s = \left(\frac{s-1}{2N}, \frac{s}{2N}\right), \quad s = 1,2, \ldots . N,$$

და დავუშვათ რომ

$$\Psi_k^N(x) = \begin{cases} \chi(x)\frac{\gamma N^{\frac{1}{2}}}{s-k} & \text{როცა} \quad x \in I_s, \quad s \neq k \\ 0 & \text{როცა} \quad x \in I_k \end{cases}, \qquad 1 \leq s,\ k \leq N\,, \tag{12}$$

სადაც მუდმივი $\gamma > 0$ არ არის დამოკიდებული N-ზე და მას მოგვიანებით შევარჩევთ. თუ გავითვალისწინებთ,რომ $|\chi(x)| = 1$ თითქმის ყველგან $x \in (0,1)$ მივიღებთ

$$I_N \coloneqq \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k \psi_k^N \right\|_{L^2\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k \chi(x) \psi_k^N \right\|_{L^2\left(0,\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \gamma N^{\frac{1}{2}} \sup_{\{b_s\}\in B_2^N} \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} (2N)^{\frac{-1}{2}} \sum_{s=1}^{N} b_s \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{N} \frac{a_k}{s-k} = \frac{\gamma}{2} \sup_{\{b_s\}\in B_2^N} \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \sum_{\substack{s,k=1 \\ s\neq k}}^{N} \frac{a_k b_s}{s-k}\,,$$

სადაც

$$B_2^n = \{\{a_k\}_{k=1}^N\} : \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \leq 1\ .$$

შევნიშნოთ, რომ ჰილბერტის მატრიცის ნორმისთვის გვაქვს შეფასება

$$\left\{ \sup_{\{b_j\}:\, \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j^2 = 1} \sum_{\substack{i,j=-\infty \\ i\neq j}}^{\infty} \frac{a_i b_j}{(j-i)^s} \right\}^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq j}}^{\infty} \frac{a_i}{(j-i)^s} \right]^2 \leq C \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2\,, \qquad s = 1,2.$$

ავიღოთ მუდმივი $\gamma > 0$, ისეთს რომ $N = 2,3, \dots$ -თვის შესრულდეს უტოლობა $I_N < 1$. ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ $\psi_k^N(x)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $k = 1,2, \dots$. ფუნქციათა სისტემა ისე, რომ სისტემა $\Psi(N) = \{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^N$ გახდეს ორთონორმირებული $(0,1)$-ზე. გარდა ამისა $\psi_k^N(x)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ფუნქციებს ჰქონდეს სახე $\psi_k^N(x) = \chi(x)\breve{\psi}_k^N(x)$, სადაც $\breve{\psi}_k^N$, $k = 1,2, \dots, N$ ფუნქციები ყველა

$$\left(\frac{s-1}{2N}, \frac{s}{2N}\right), \quad s = N+1, N+2, \dots, 2N$$

ინტერვალზე მუდმივია. ცხადია, რომ $k = 1,2, \dots. N$-თვის ფუნქცია $\psi_k^N \in D_{4N}$ და $\int_0^1 \psi_k^N(x)dx = 0$, რადგან ნებისმიერი $s = 1,2 \dots 2N$ და $k = 1,2 \dots N$-თვის

$$\int_{\frac{s-1}{2N}}^{\frac{s}{2N}} \psi_k^N(x)dx = c \int_{\frac{s-1}{2N}}^{\frac{s}{2N}} \chi(x)dx = 0.$$

დავამტკიცოთ (10) შეფასების სამართლიანობა. ამისათვის დავუშვათ $j(x) = s$, $x \in I_s$, $s = 1,2, \dots N$. მაშინ $x \in I_s$-თვის, $s = 1,2, \dots N$ გვექნება

$$\left| \sum_{k=1}^{j(x)} \psi_k^N(x) \right| = \gamma N^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{s-k} = \gamma N^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{s-1} \frac{1}{p} \geq c N^{\frac{1}{2}} \log_2 s \,. \tag{13}$$

მე-13 უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$-თვის

$$\left| \sum_{k=1}^{j(x)} \psi_k^N(x) \right| > c_0 N^{\frac{1}{2}} \log_2 N \,.$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. ლემა 1-ში აგებული $\psi_k^N(x)$, $k = 1,2, \dots, N$, $N = 2,3, \dots$, ფუნქციათა სისტემა გავაგრძელოთ პერიოდულად პერიოდით 1, R-ზე. განვმარტოთ მთელ რიცხვთა R_q, $q = 0,1, \dots$ მიმდევრობა შემდეგნაირად

$$R_0 = 1, \quad R_{q+1} = 4^{q+1} R_q, \qquad q = 0,1, \dots \,, \tag{14}$$

და განვსაზღვროთ $\psi_1(x) = 1$, $x \in (0,1)$ ფუნქციები, თუ $n = 2^q + m$, $0 \leq m \leq 2^q - 1$, $q = 1,2, \dots$, მაშინ

$$\psi_n(x) = \psi_{m+1}^{2^q}\left(R_q x\right), \quad x \in (0,1) \,. \tag{15}$$

ვაჩვენოთ, რომ სისტემა $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ აკმაყოფილებს თეორემა 2-ის პირობებს. პირველ რიგში შევამოწმოთ, რომ Ψ არის ორთონორმირებული სისტემა. თუ $2^q \leq n, \ n' < 2^{q+1}, q = 1,2, \dots$, მაშინ პირდაპირ ლემა (1)-ის და (15)-ის გამოყენებით, გვექნება

$$\int_0^1 \psi_n(x)\psi_{n'}(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{როცა } n = n' \\ 0, & \text{როცა } n \neq n' \end{cases} .$$

თუ $n' < 2^q \leq n < 2^{q+1}$, $q = 1,2, \dots$, მაშინ იმის გათვალისწინებით, რომ $\psi_n(x)$ ფუნქციას აქვს R_q^{-1} -ის ტოლი პერიოდი და $\int_0^1 \psi_n(x)dx = 0$, ხოლო $\psi_{n'}(x)$ ფუნქცია მუდმივია ნებისმიერ $\left(\frac{i-1}{N_{q-1}}, \frac{i}{N_{q-1}}\right)$ ინტერვალზე, სადაც $N_{q-1} = 4 \cdot 2^{q-1} R_{q-1} = 2^{-(q-1)} R_q$, მივიღებთ რომ

$$\int_0^1 \psi_{n'}(x)\psi_n(x)dx = \sum_{i=1}^{N_{q-1}} c_i \int_{\frac{i-1}{N_{q-1}}}^{\frac{i}{N_{q-1}}} \psi_n(x)dx = 0 \,.$$

განვიხილოთ $\{\omega_n\}$ მიმდევრობა, ისეთი რომ $1 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \cdots$ და $\omega_n = o(log_2^2 n)$, $n \to \infty$. ვიპოვოთ მთელ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა q_j, $j = 1,2,\ldots$ ისეთი, რომ

$$1 \le \omega_{2^{q_j+1}}^{\frac{1}{2}} < j^{-3} q_j, \quad , \text{ j} = 1,2 \ldots \tag{16}$$

განვსაზღვროთ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა შემდეგნაირად

$$a_n = \begin{cases} \left[2^{q_j}\omega_{2^{q_j+1}}\right]^{\frac{-1}{2}} j^{-1}, \text{თუ} \quad 2^{q_j} \le n \le 2^{q_j+1}, \ \ j = 1,2 \ldots \\ \quad 0 \qquad\qquad \text{დანარჩენი} \quad n - \text{ებისთვის} \end{cases} \tag{17}$$

(10) შეფასების და (15) უტოლობის ძალით როცა $j = 1,2,\ldots$ გვაქვს

$$m\left\{x \in (0,1): \max_{2^{q_j} \le l \le 2^{q_j+1}} \left|\sum_{n=2^{q_j}}^{l} a_n \psi_n(x)\right| > c_0 a_{2^{q_j}} 2^{\frac{l}{2}q_j} q_j\right\} \ge \frac{1}{4} \ ,$$

საიდანაც, (16)-(17)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$m(E_j) \coloneqq m\left\{x \in (0,1) : \max_{2^{q_j} \le l \le 2^{q_j+1}} \left|\sum_{n=2^{q_j}}^{l} a_n \psi_n(x)\right| > c_0 j^2\right\} \ge \frac{1}{4} \tag{18}$$

(18) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ მწკრივის განშლადობა დადებითი ზომის სიმრავლეზე, კოეფიციენტებით (17). ბორელ-კანტელის ლემიდან და (18)-დან გვექნება

$$m\left(\lim_{j\to\infty} \overline{E_J}\right) = 1,$$

მაშასადამე $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ მწკრივი თითქმის ყველგან განშლადია $(0;1)$ სიმრავლეზე. შესამოწმებელი დარჩა ის ფაქტი, რომ (17) ტოლობით განსაზღვრულმა მიმდევრობამ დააკმაყოფილოს (9) პირობები. მართლაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=2^{q_j}}^{2^{q_j+1}-1} a_n^2 \omega_n \le \sum_{j=1}^{\infty} a_{2^{q_j}}^2 \, \omega_{2^{q_j}} 2^{q_j} \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$$

თეორემა 2 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ რომ ყველა ცნობილი ორთოგონალურ ფუნქციათა $\{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^N$ სისტემები, რომელთათვისაც სამართლიანია (10) შეფასება მეტნაკლებად ეფუძნება ჰილბერტის $\left\{\frac{1}{i-j}\right\}$ მატრიცის თვისებებს. ამავე დროს „გარეგნულად“ ასეთი მაგალითები შეიძლება მკვეთრად განსხვავდებოდეს თეორემა 2-ში მოყვანილი ფუნქციათა სისტემებისგან.

თეორემა 3. არსებობს ორთონორმირებული $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ სისტემა, ისეთი რომ $|\psi_n(x| = 1$ თითქმის ყველგან $x \in (0;1)$, n=1,2,..., რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2-ის ყველა მოთხოვნას.

ლემა 3. არსებობს მუდმივი $A_1 > 0$ და $A_2 > 0$ ისეთი, რომ ყოველი $p = 1,2,\dots$ მოიძებნება ორთონორმირებული $\psi(p) = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{2p^2}$, $x \in (0;1)$, სისტემა, რომელთათვისაც $|\psi_n(x| = 1$, თითქმის ყველგან $(0;1)$ და $n = 1,2 \dots 2p^2$-თვის

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{1\le j\le 2p^2}\left|\sum_{n=1}^{j}\psi_n(x)\right| > A_1 p \log_2 p\right\} \ge A_2.$$

გარდა ამისა $\psi_n(x)$, $n = 1,2,\dots,2p^2$ ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია, ამასთან მუდმივობის შუალედები არის სასრული.

ქვემოთ დავამტკიცებთ ლემა 3-ს. ლემა 3-დან თეორემა 3-ის დამტკიცება ანალოგიურია თეორემა 2-ის დამტკიცებისა, ამიტომ მას არ მოვიყვანთ.

ლემა 3-ის დამტკიცება. დავდაპირველად განვიხილოთ დამხმარე $\boldsymbol{f_n}(x)$, $n = 1,2,\dots,2p$ ფუნქციათა სისტემა (0;4) ინტერვალზე :

$$f_n(x) = \frac{1}{2(s-p-n-\frac{1}{2})} \;,\quad x \in \left(\frac{s-1}{p}, \frac{s}{p}\right) - \text{ზე} \quad s = 1,2 \dots .4p. \tag{19}$$

ვთქვათ $1 \le n$, $l \le 2p$. განვსაზღვროთ რიცხვები

$$a_{n,l} = \int_0^4 f_n(x) f_l(x) dx.$$

მაშინ გვექნება

$$a_{n,n} \le \frac{C}{p}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2} \le \frac{C_1}{p}, \quad 1 \le n \le 2p \tag{20}$$

თუ $n > l$ მაშინ

$$a_{n,l} = \frac{1}{4p}\sum_{s=1}^{4p} \frac{1}{\left(s-p-n-\frac{1}{2}\right)\left(s-p-l-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4p(n-l)}\sum_{s=1}^{4p}\left\{\frac{1}{s-p-n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{s-p-l-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4p(n-l)}\left\{\sum_{s=1-p-n}^{3p-n}\frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \sum_{s=1-p-l}^{3p-l}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4p(n-l)}\left\{\sum_{s=1-p-n}^{-p-l}\frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \sum_{s=3p-n+1}^{3p-l}\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right\},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$a_{n,l} \le \frac{C_2}{p^2}\,, \quad n \ne l\,. \tag{21}$$

მარტივია იმის შემოწმება, რომ (ისევე, როგორც ლემა 1-ის და თეორემა 2-ის დამტკიცებაში)

$$\max_{1\le j\le 2p}\sum_{n=1}^{j} f_n(x) \ge c_3 \log_2 p \qquad x \in (2;3) \tag{22}$$

თითქის ყველგან. განვიხილოთ ფუნქციები

$$g_{r+(s-1)p}(x) = f_s(x), \qquad x \in (0;4), \quad r = 1,2,\dots,p, \quad s = 1,2,\dots,2p. \tag{23}$$

მაშინ (20) და (21) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^4 g_n(x)g_m(x)dx \le \gamma_{|n-m|} \qquad n,m = 1,2,\dots,2p^2,$$

სადაც

$$\gamma_i = \begin{cases} C_1p^{-1}, & \text{როცა} \quad 0 \le i \le p-1. \\ C_2p^{-2}, & \text{როცა} \quad p \le i \le 2p^2-1. \end{cases}$$

რადგან $\sum_{i=1}^{2p^2-1}\gamma_i \le C_4$, ჩვენ შეგვიძლია ისე განვსაზღვროთ $g_n(x)$, $n = 1,2,\dots,2p^2$ ფუნქცი, რომ შესრულდეს პირობები

1) $\{g_n\}_{n=1}^{2p^2}$-ორთოგონალური სისტემაა $(0,M)$-ზე;

2) $|g_n(x)| = 1$ თითქმის ყველგან $x \in (4,M)$ და $|g_n(x)| \le 1$, როცა $x \in (0,4)$;

3) $g_n(x)$ ფუნქციები უბან-უბან მუდმივია $(4,M)$ ინტერვალზე, მაშასადამე

$$h_n(x) = g_n(Mx)\,, \quad x \in (0;1), \quad 1 \le n \le 2p^2\,,$$

სისტემა შედგენილია უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებისგან (მაგრამ არა ნორმირებული), რომლისთვისაც $h_n(x) \leq 1$, $x \in (0;1)$, $n = 1,2, \dots ,2p^2$. (22) და (23)-ს ძალით გვექნება

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{1\leq j\leq 2p^2} \left|\sum_{n=1}^{j} h_n(x)\right| \geq c_3 p \log_2 p\right\} \geq c_5 > 0 . \tag{24}$$

(0;1) ინტერვალი დავყოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ I_r, $r = 1,2, \dots , R$ ინტერვალებად, რომლებზედაც ყოველი $h_n(x)$ ფუნქცია მუდმივია

$$h_n(x) = p_n(r) , \quad x \in I_r = (a_r, b_r) , \quad 1 \leq r \leq R , \quad 1 \leq n \leq 2p^2. \tag{25}$$

ვთქვათ ყოველი $r = 1,2, \dots R$ ნომრისთვის $\{\chi_n^r(x)\}_{n=1}^{2p^2}$ არის დამოუკიდებელი, უბან-უბან მუდმივი ფუნქციების ერთობლიობა განსაზღვრული I_r-ზე, ისეთი, რომ $\int_{I_R} \chi_n^r(x)dx = 0$ და ფუნქცია $\chi_n^r(x)$ იღებს მნიშვნელობებს : $1 - p_n(r)$ და $-1 - p_n(r)$.

$\chi_n^r(x)$ ფუნქციების დახმარებით განვსაზღვროთ საჭირო ფუნქციათა $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{2p^2}$ ერთობლიობა. დავუშვათ $\psi_n(x) = h_n(x) + \chi_n^r(x)$, $x \in I_r$, $r = 1,2, \dots , R$, $n = 1,2, \dots ,2p^2$ ან რაც იგივეა

$$\psi_n(x) = h_n(x) + \psi_n'(x), \quad \psi_n'(x) = \sum_{r=1}^{R} \chi_n^r(x) , \; x \in (0;1) . \tag{26}$$

მაშინ $\psi_n(x)$ ფუნქციები უბან-უბან მუდმივია და $|\psi_n(x)| = 1$ თითქმის ყველგან $x \in (0;1)$, $n = 1,2, \dots ,2p^2$. შევამოწმოთ $\{\psi_n\}_{n=1}^{2p^2}$ სისტემის ორთოგონალურობა. $k \neq l$ -თვის (26)-ის ძალით

$$\int_0^1 \psi_k(x)\,\psi_l(x)dx =$$

$$= \int_0^1 h_k(x)h_l(x)dx$$

$$+ \int_0^1 h_k(x)\,\psi_l'(x)dx + \int_0^1 h_l(x)\,\psi_k'(x)dx + \int_0^1 \psi_k'(x)\;\psi_l'(x) = 0,$$

რადგან ნებისმიერი k და $l \neq k$-თვის $\{h_n\}$ სისტემა ორთოგონალურია გვაქვს

$$\int_0^1 h_k(x)\,\chi_l^r(x)dx = p_k(r) \int_{I_r} \chi_l^r(x)dx = 0,$$

$$\int_{I_r} \chi_k^r(x)\chi_l^r(x)dx = 0 , \qquad r = 1,2, \dots , R .$$

ვთქვათ I_r-ნებისმიერი ინტერვალია, ზოგიერთი $j = j(r)$, $1 \le j \le 2p^2$ ინდექსისთვის სამართლიანია

$$\left|\sum_{n=1}^{j(r)} h_n(x)\right| \ge c_3 p \log_2 p \ , \quad x \in I_r. \tag{27}$$

(24)-ის ძალით ასეთი ინტერვალების ზომა არ არის ნაკლები c_5-ზე , ამიტომაც ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ როცა $p \ge p_0$

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} \psi_n(x)\right| \ge \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \ge \frac{1}{2}|I_r| \tag{28}$$

ყოველი I_r ინტერვალისთვის, რომლისთვისაც სრულდება (27) თანაფარდობა.

χ_n^r ფუნქციების წყვილ-წყვილად ორთოგონალურობის და $\|\chi_n^r\|_\infty \le 2$, $n = 1,2, \dots, 2p^2$, უტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$\int_{I_r} \left[\sum_{n=1}^{j(r)} \chi_n^r(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{j(r)} \int_{I_r} [\chi_n^r(x)]^2 dx \le 2p^2 4|I_r| = 8p^2|I_r| \, . \tag{29}$$

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით, (29)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} \chi_n^r(x)\right| > \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \le \frac{c_6|I_r|}{\log_2^2 p} \le \frac{1}{2}|I_r| \, , \tag{30}$$

თუკი p საკმარისად დიდია $\left(\frac{c_6}{\log_2^2 p} < \frac{1}{2}\right)$. (27) და (30) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} [h_n(x) + \chi_n^r(x)]\right| \ge \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \ge \frac{1}{2}|I_r|.$$

რადგანაც $h_n(x) + \chi_n^r(x) = \psi_n(x)$, $x \in I_r$, ამიტომ (28) შეფასება და მასთან ერთად ლემა 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ვთქვათ $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემაა და $L_n(t)$, $t \in (0;1)$, $n = 1,2,\dots$ ლებეგის ფუნქციებია. თუ რაიმე $E \subset (0;1)$ სიმრავლის თითქმის ყველა t წერტილისთვის სამართლიანია თანაფარდობა

$$L_n(t) \le C\lambda_n \, , \ n = 1,2,\dots$$

$$\text{სადაც} \ \ \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots, \tag{31}$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty \tag{32}$$

უტოლობიდან გამომდინარეობს (1) მწკრივის თ.ყ. კრებადობა E სიმრავლეზე.

ლემა 4. ვთქვათ ნომერთა $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(v_1 < v_2 < \cdots)$ რომელიღაც მიმდევრობისთვის, $\Phi = \{\varphi_n\}$ სისტემის ლებეგის $L_{v_k}(t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს

$$L_{v_k}(t) \leq C\lambda_{v_k}, \quad k = 1,2, \dots, \quad t \in E, \quad 0 < \lambda_{v_1} \leq \lambda_{v_2} \leq \cdots, \tag{33}$$

დადებითი ზომის რაიმე $E \subset (0,1)$ სიმრავლეზე. თუ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{34}$$

მაშინ (1) მწკრივის კერძო ჯამებისთვის სრულდება უტოლობები : $\left|S_{v_k}(x)\right| \leq C_x \lambda_{v_k}^{1/2}$, $k = 1,2, \dots$, თითქმის ყველგან $x \in E$, სადაც C_x მუდმივია, დამოკიდებულია x-ზე და არა k-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $k_n(x)$ არის უმცირესი $v_1, v_2, \dots v_n$ რიცხვებს შორის, რომლისთვისაც მიიღწევა $\max\limits_{1\leq k\leq n} S_{v_k}(x)\, \lambda_{v_k}^{-1/2}$. ავღნიშნოთ

$$\delta_n^+(x) = \max_{1\leq k\leq n} S_{v_k}(x)\, \lambda_{v_k}^{-1/2} = S_{k_n(x)}(x) \lambda_{k_n(x)}^{-1/2}, \quad x \in (0,1). \tag{35}$$

ცხადია, რომ

$$\delta_1^+(x) \leq \delta_2^+(x) \leq \cdots \quad \text{და} \quad \int_0^1 |\delta_1^+(x)| dx < \infty. \tag{36}$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^+(x) < \infty \quad \text{თითქმის ყველგან } x \in E. \tag{37}$$

ამისთვის, (36)-ის თანახმად, საკმარისია შემოწმდეს, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \delta_n^+(x) dx < \infty. \tag{38}$$

გვექნება

$$S_N(x) = \int_0^1 S_v(t) K_N(t,x) dt,$$

$$N \leq v, \quad K_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t)\, \varphi_n(x)$$

თუ გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას მივიღებთ

$$\int_E \delta_n^+(x)dx == \int_E \lambda_{k_n(x)}^{-1/2} \int_0^1 S_{v_n}(t) K_{k_n(x)}(t,x)dt\, dx =$$

$$= \int_0^1 S_{v_n}(t) \int_E K_{k_n(x)}(t,x) \lambda_{k_n(x)}^{-1/2}\, dx\, dt \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 S_{v_n}^2(t)dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 \left[K_{k_n(x)}(t,x) \lambda_{k_n(x)}^{-1/2}\, dx \right]^2 dt \right\}^{1/2}. \tag{39}$$

$L^2(0;1)$ სივრცეში (1) მწკრივის კრებადობის ძალით

$$\left\{ \int_0^1 S_{v_n}^2(t)dt \right\}^{1/2} \le \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 \right\}^{1/2} = C < \infty .$$

ამ ფაქტის გათვალისწინებით (39) დან მივიღებთ

$$\int_E \delta_n^+(x)dx \le C \left\{ \int_0^1 \int_E \int_E K_{k_n(x)}(t,x) K_{k_n(y)}(t,y)\, \lambda_{k_n(x)}^{-1/2} \lambda_{k_n(y)}^{-1/2}\, dxdydt \right\}^{1/2}. \tag{40}$$

t ცვლადით (40)-ის ინტეგრირებით და

$$\int_0^1 K_{k_n(x)}(t,x) K_{k_n(y)}(t,y)dt = K_{k_n(x,y)}(x,y)\,,$$

ტოლობის გათვალისწინებით, სადაც $K_n(x,y) = min\{K_n(x), K_n(y)\}$, მივიღებთ რომ

$$\int_E \delta_n^+(x)dx \le C \left\{ \int_E \int_E \left| K_{k_n(x,y)}(x,y) \lambda_{k_n(x,y)}^{-1} \right| dxdy \right\}^{1/2} \le$$

$$\le C \left\{ \int_E \int_E \left| K_{k_n(x)}(x,y) \right| \lambda_{k_n(x)}^{-1}\, dxdy + \int_E \int_E \left| K_{k_n(y)}(x,y) \right| \lambda_{k_n(y)}^{-1}\, dxdy \right\}^{1/2}$$

$$\le C \left\{ \int_E L_{k_n(x)}(x) \lambda_{k_n(x)}^{-1} dx + \int_E \qquad \right\}^{1/2}.$$

(33)-ის თანახმად, უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (38) შეფასება, და მაშასადამე (37) შეფასებაც.

(1) მწკრივის ნაცვლად თუ განვიხილავთ $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n\varphi_n(x)$ მწკრივს, (37)-დან მივიღებთ $\lim_{n\to\infty} \delta_n^-(x) > -\infty$, თითქმის ყველა $x \in E$,

$$\delta_n^-(x) \coloneqq \min_{1\le k\le n} S_{v_k}(x)\lambda_{v_k}^{-1/2}. \tag{41}$$

(37) და (41) თანაფარდობებიდან დავასკვნით რომ თითქმის ყველა E-ზე

$$f^-(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_n^-(x) \le S_{v_k}(x)\lambda_{v_k}^{-1/2} \le \lim_{n\to\infty} \delta_n^+(x) = f^+(x), \quad k = 1,2,\dots,$$

სადაც ფუნქციები $f^-(x)$ და $f^+(x)$ სასრულია თითქმის ყველა E-ზე, მაშასადამე გვაქვს $\left|S_{v_k}(x)\right| \le \{|f^-(x)| + |f^+(x)|\}\lambda_{v_k}^{1/2}, \quad k = 1,2,\dots$. ლემა 4 დამტკიცებულია.

თეორემა 4-ის დამტკიცება. ვთქვათ $\{\mu_n\}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\lambda_n\mu_n < \infty. \tag{42}$$

აღვნიშნოთ $\sigma_n(x)$-ით

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n\mu_n)^{1/2}\varphi_n(x). \tag{43}$$

მწკრივის N-ური კერძო ჯამი. მწკრივი (1)-ის $S_N(x)$ კერძო ჯამების შესაფასებლად გამოვიყენოთ შემდეგი ცხადი ტოლობა

$$S_{q+p}(x) - S_q(x) = \sum_{n=q+1}^{q+p} \frac{1}{(\lambda_n\mu_n)^{1/2}} a_n(\lambda_n\mu_n)^{1/2}\varphi_n(x) \tag{44}$$

სადაც $1 \le p$, $q < \infty$. (44) ჯამისთვის თუ გამოვიყენებთ აბელის გარდაქმნას.მივიღებთ

$$\left|S_{q+p}(x) - S_q(x)\right| \le$$

$$\le \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]|\sigma_n(x)| + \left(\lambda_{q+1}\mu_{q+1}\right)^{-1/2}\left|\sigma_q(x)\right|$$

$$+ \left(\lambda_{q+p}\mu_{q+p}\right)^{-1/2}\left|\sigma_{q+p}(x)\right|. \tag{45}$$

გამოვიყენოთ ლემა 1 (როცა $v_k = k$) (43) მწკრივის კერძო ჯამების შესაფასებლად. თითქმის ყველა $x \in E$ რიცხვისთვის გვექნება

$$\left|\sigma_{q+p}(x)\right| \le C_x\, \lambda_{q+p}^{1/2}\left|\sigma_q(x)\right| \le C_x\, \lambda_q^{1/2}, \quad 1 \le q,p < \infty.$$

(45) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველა $x \in E$ რიცხვისთვის , როცა $q \to \infty$

$$\left|S_{q+p}(x) - S_q(x)\right| \leq \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right] |\sigma_n(x)| + 0_x(1),$$

სადაც $0_x(1)$ არის x-სა და q-ზე დამოკიდებული სიდიდე, რომელიც მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა $q \to \infty$. თეორემა 4--ის დასამტკიცებლად საჩვენებელი დაგვრჩა ,რომ თითქმის ყველგან $x \in E$-თვის

$$\sup_{1\leq p<\infty} \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right] |\sigma_n(x)| = 0_x(1)\text{ ,როცა } q \to \infty.$$

ლევის თეორემის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right] |\sigma_n(x)|\, dx < \infty\,. \tag{46}$$

თუ ვისარგებლებთ $\lambda_n\mu_n$, $n = 1,2,\ldots$, მიმდევრობის მონოტონურობით და (42) შეფასებით, გვექნება

$$S \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\lambda_n\mu_n\right)^{-1/2} - \left(\lambda_{n+1}\mu_{n+1}\right)^{-1/2}\right] \|\sigma_n(x)\|_2 \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\lambda_n\mu_n\right\}^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\lambda_n\mu_n\right)^{-1/2} - \left(\lambda_{n+1}\mu_{n+1}\right)^{-1/2}\right] < \infty\,.$$

(46) თანაფარდობის გათვალისწინებით თეორემა 4 დამტკიცებულია.

§2. ორთოგონალური მწკრივების თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობა

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობას შემდეგი სახის მწკრივებისთვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\ , \quad x \in (0;1) \tag{47}$$

სადაც $\{\varphi_n\}$ ორთონორმირებული სისტემაა. შევნიშნოთ, რომ მეტრიკულ სივრცეში მწკრივების უპირობო კრებადობისგან განსხვავებით, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა არ გამომდინარეობს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \ \ \varepsilon_n = \pm 1, \ \ n = 1,2, \dots$$

სახის მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობიდან. ამიტომ ორთოგონალური მწკრივების თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობის ამოცანების შესასწავლად ხშირად გვიწევს სიძნელეების გადალახვა, რომლებიც დაკავშირებულია მოცემული ორთონორმირებული სისტემების ყველა შესაძლო გადანაცვლების შესწავლასთან.

რაც შეეხება (47) მწკრივის კოეფიციენტებზე პირობას, რომელიც $\Phi = \{\varphi_n\}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემისთვის იძლევა ამ მწკრივის კრებადობას თითქმის ყველგან, ცნობილია. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ მათგანს

თეორემა 5. თუ (47) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=v_k+1}^{v_{k+1}} a_n^2 \log_2^2 n \right]^{1/2} < \infty \, , \quad v_k = 2^{2^k}, \ \ k = 0,1, \dots, \tag{48}$$

მაშინ მწკრივი (47) უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $a_1 = a_2 = 0$. ნატურალურ რიცხვთა $\{v_k + 1, \dots, v_{k+1}\}$ ერთობლიობა ავღნიშნოთ H_k-თი , $k = 0,1 \dots$. ვთქვათ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{49}$$

არის (47) მწკრივის ნებისმიერი გადანაცვლება. $k = 0,1, \dots$ რიცხვისთვის განვსაზღვროთ რიცხვთა $\{\varepsilon_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა , რომელიც ტოლია 0 ან 1-ის შემდეგნაირად

$$\varepsilon_n^k = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \ \sigma(n) \in H_k, \\ 0, & \text{თუ } \ \sigma(n) \notin H_k \, . \end{cases}$$

მაშინ ნათელია, რომ ნებისმიერი $p, q \ (p \le q)$ და $x \in (0;1)$ -თვის გვაქვს

$$\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^k \, a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{50}$$

(50) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი მწკრივი კრებადია ნებისმიერი $x \in (0;1)$-თვის, რადგან მისი ყველა წევრი დაწყებული რომელიღაც ნომრიდან ნულის ტოლია).

განვიხილოთ $\delta_k(x), \quad k = 0,1, \dots,$ ფუნქციები

$$\delta_k(x) = \sup_{1 \le p < q < \infty} \left| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^k a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| . \tag{51}$$

ლემა 1-ის, თეორემა 1-ის და

$$\delta_k(x) \leq 2 \sup_{1\leq q<\infty} \left| \sum_{n=1}^{q} \varepsilon_n^k a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|$$

შეფასების ძალით გვექნება

$$\int_0^1 \delta_k(x)\, dx \leq \left\{ \int_0^1 \delta_k^2(x)\, dx \right\}^{1/2} \leq K 2^k \left\{ \sum_{n\in H_k} a_n^2 \right\}^{1/2} \quad ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \delta_k(x)\, dx < \infty \,,$$

და ლევის თეორემის ძალით საბოლოოდ მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(x) < \infty \,, \quad x \in G \subset (0;1), \quad m(G) = 1. \tag{52}$$

ყოველი $x \in G$ და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $N = N(x, \varepsilon)$, რომ

$$\sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ რომ, თუ რიცხვი $p = p(x, \varepsilon)$ საკმაოდ დიდია, მაშინ ჯამი $\sum_{n=1}^{p-1} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$ შეიცავს ყველა $\varphi_n(x)$ ფუნქციას ნომრებით H_k, $0 \leq k \leq N(x, \varepsilon)$ სიმრავლიდან და (50) ტოლობის თანახმად $q \geq p$ გვექნება

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon \,. \tag{53}$$

რადგან (53) უტოლობაში $\varepsilon > 0$, შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე, (49) მწკრივი კრებადია ყოველი $x \in G$ წერტილისთვის, სადაც $m(G) = 1$. თეორემა 5 დამტკიცებულია.

შედეგი 2. თუ (47) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის, რომელიღაც $\varepsilon > 0$ -თვის სრულდება პირობა

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log_2^2 n (\log_2 \log_2 n)^{1+\varepsilon} < \infty ,$$

მაშინ (47) მწკრივი უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან.

შედეგი 3. თუ რომელიღაც $\varepsilon > 0$ -თვის

$$\sum_{n=1}^{\propto} |a_n|^{2-\varepsilon} < \infty ,$$

მაშინ (47) მწკრივი უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან.

მართლაც განვიხილოთ (47) მწკრივის ისეთი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \quad , \tag{54}$$

გადანაცვლება, რომ რიცხვები $\left|a_{\sigma(n)}\right|$, $n = 1,2, \dots$ ქმნიდნენ არაზრდად მიმდევრობას

$$\left|a_{\sigma(1)}\right| \geq \left|a_{\sigma(2)}\right| \geq \cdots.$$

მაშინ $\left|a_{\sigma(n)}\right|^{2-\varepsilon} \leq Cn^{-1}$, $n = 1,2, \dots$,და ამიტომ რომელიღაც $\delta > 0$ რიცხვისთვის

$$\left|a_{\sigma(n)}\right| \leq Cn^{-({}^{1}\!/_{2}+\delta)} , \qquad n = 1,2, \dots$$

თეორემა 5-დან გამომდინარეობს (54) მწკრივის უპირობოდ კრებადობა თითქმის ყველგან, ან რაც იგივეა (47) მწკრივის თითქმის ყველგან უპირობოდ კრებადობა. შედეგი 3 დამტკიცებულია.

თეორემა 6. არსებობს $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემა ისეთი, რომ ნებისმიერი $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty \qquad (b_k > 0) \tag{55}$$

მწკრივი $\left(v_k = 2^{2^k}\right)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^k v_k} \sum_{n=v_k+1}^{v_{k+1}} \varphi_n(x) =: \sum_{n=3}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{56}$$

განშლადია თითქმის ყველგან $(0;1)$-ზე წევრთა გარკვეული გადანაცვლების შემდეგ.

შენიშვნა. (55) პირობა მე-6 თეორემაში აუცილებელია იმ მოსაზრებით, რომ თუ $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k| < \infty$, მაშინ (56) მწკრივის კოეფიციენტებისთვის გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=v_k+1}^{v_{k+1}} a_n^2 \log_2^2 n\right]^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{\infty}|b_k| < \infty$$

და თეორემა 5-ის ძალით (56) მწკრივი უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან. რაც შეეხება $b_k \geq 0$ პირობას ცხადია ის არ არის არსებითი. თეორემა (6)-ში თუ ავიღებთ $b_k = \frac{1}{k\log_2 k}$, $k = 2,3,\ldots,$ მივიღებთ

შედეგი 4. არსებობს ორთოგონალური მწკრივი (47) , რომელიც წევრების გარკვეული გადანაცვლების შემდეგ განშლადია და ამასთანავე

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2\, log_2^2 n \log_2 \log_2 n < \infty.$$

ქვემოთ $D_N^0(I)$, $I = (a;b) \subset (0;1)$-ით აღვნიშნავთ $(N-1)$ განზომილებიან ქვესივრცეს $D_N(I)$-ში, რომელიც შედგება ყველა იმ $f(x)$ ფუნქციებისგან, რომელთათვისაც $\int_I f(x)dx = 0$

თეორემა 6-ის დამტკიცება ეფუძნება შემდეგ ლემას.

ლემა 5. ყოველი $N \geq 100$ და ყოველი $I = (a;b) \subset (0;1)$ ინტერვალისთვის, $D_{2N}^0(I)$ სივრცეში მოიძებნება ორთონორმირებული ბაზისი

$$\Psi_{2N-1}(I) = \left\{\psi_n^{2N-1}(x,I)\right\}_{n=1}^{2N-1} = \left\{\psi_n(x)\right\}_{n=1}^{2N-1} ,$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

1) $n = 1,2,\ldots,N-1$ -თვის $\psi_n(x)$ ფუნქცია $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ ინტერვალზე იცვლის ნიშანს მხოლოდ ერთხელ, ანუ რაღაც $\xi_n \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ წერტილისთვის გვაქვს : $\psi_n(x) \leq 0$, თუ $\frac{a+b}{2} < x < \xi_n$ და $\psi_n(x) \geq 0$ თუ $\xi_n < x < b$, ამასთან

$$\frac{a+b}{2} \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_{N-1} \leq b \tag{57}$$

(ξ_n წერტილს დავარქვათ $\psi_n(x)$ ფუნქციის ნიშნის არსებითად ცვლილების წერტილი);

2) თ.ყ. $x \in \left(a+\frac{5}{8}|I|,\ a+\frac{7}{8}|I|\right)$ წერტილისთვის სრულდება უტოლობა

$$\sum_{n=1}^{m(x)} \psi_n(x) \geq c\frac{N^{1/2}}{|I|^{1/2}}\log_2 N\,,$$

სადაც $m(x) \coloneqq max\left\{m : \xi_m < x,\ \ m = 1,2,\dots,N-1\right\}$, და $c > 0$ აბსოლუტურად მუდ-მივია.

ვიდრე ლემა 1-ს დავამტკიცებდეთ, ავღნიშნოთ, რომ $C > 0$ აბსოლუტურად მუდმივისთვის, როცა $A = 1,2,\dots$, $N = 1,2,\dots$ მატრიცის ნორმა

$$\|H_N(A)\| \leq C, \quad H_N(A) = \left\{h_{s,k}\right\}_{s,k=1}^{N}, \tag{59}$$

სადაც $H_N(A)$ მატრიცი განმარტებულია ტოლობით

$$h_{s,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-k}, & \text{როცა} \quad 0 < |s-k| \leq A \\ 0, & \text{როცა} \quad s = k \ \text{ან} \ |s-k| > A, \\ & s,k = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

ლემა 5-ის დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $I = (0;1)$, ხოლო შემდეგ წრფივი გარდაქმნით $\Psi_{2N-1}((0;1))$ სისტემა გადავიტანოთ I ინტერვალზე $L^2(0;1)$ ნორმის შენარჩუნებით. მიღებული სისტემა ავღნიშნოთ $\Psi_{2N-1}(I)$-ით.

$\Psi_{2N-1}((0;1))$ სისტემა იქნება თეორემა 2-ში აგებული ორთონორმირებული სისტემის გარკვეული მოდიფიკაცია, რომელიც აგებულია მე-(2) თეორემაში. როცა $N^{1/2} < n < N - N^{1/2}$ და $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ ფუნქციები განვმარტოთ შემდეგი წესით

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma N^{1/2}}{s-n} & \text{როცა} \ \ x \in \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{s-1}{2N}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{s}{2N}\right) \\ 0, & \text{როცა} \ \ x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \qquad 0 < |s-n| \leq N^{1/2}, \tag{60}$$

სადაც მუდმივი $\gamma > 0$ არაა დამოკიდებული N-ზე და შერჩეული იქნება ქვემოთ.

როცა $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ განვმარტოთ ფუნქციები

$$\psi_n(x) = 0, \qquad 1 \leq n \leq N^{1/2}, \qquad N - N^{1/2} \leq n \leq N-1 \tag{60'}$$

მაშინ თუ ავიღებთ

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{როცა} \quad 1 \le n \le N^{1/2}, \\ \frac{n-1}{2N} + \frac{1}{2} & \text{როცა} \quad N^{1/2} < n < N - N^{1/2}, \\ 1 & \text{როცა} \quad N - N^{1/2} \le n \le N-1. \end{cases}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (60) და (60') თანაფარდობით განსაზღვრული ფუნქციათა $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N-1}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $N \ge 100$ სისტემისათვის სრულდება 1) და 2) პირობები. გარდა ამისა (59)-დან მიიღება, რომ საკმარისად მცირე $\gamma > 0$ მუდმივისათვის

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^{N-1}} \left\| \sum_{n=1}^{N-1} a_n \psi_n(x) \right\|_{L^2(\frac{1}{2},1)} < 1,$$

და მაშასადამე $\psi_n(x)$, $n = 1,2,\dots,N-1$ ფუნქციები შესაძლებელია $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ინტერვალზე განისაზღვროს ისე, რომ შესრულდეს პირობები

ა) $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N-1}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემაა;

ბ) $\psi_n \in D_N^0\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $n = 1,2,\dots,N-1$. (61)

ვინაიდან $\int_{1/2}^{1} \psi_n(x)dx = 0$, $n = 1,2,\dots,N-1$, ამიტომ (61)-დან დავასკვნიოთ, რომ $\psi_n \in D_{2N}^0((0,1))$, $n = 1,2,\dots,N-1$. ნებისმიერი ხერხით $\{\psi_n\}_{n=1}^{N-1}$ სისტემის გასრულებით $D_{2N}^0((0,1))$ სივრცის ორთოგონალურ ბაზისამდე, მივიღებთ $\Psi_{2N-1}((0,1))$ საძიებელ სისტემას.

თეორემა 6-ის დამტკიცება. $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემას ვაგებთ ისე, რომ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\nu_k}$ $\left(\nu_k = 2^{2^k}\right)$, $k = 3,4,\dots$ ფუნქციათა ჯგუფმა შექმნას ორთონორმირებული ბაზისი $D_{\nu_k} := D_{\nu_k}((0,1))$ სივრცეში.

$\varphi_n(x)$, $n = 1,2,\dots,\nu_3$ ფუნქციები ავიღოთ ისე, რომ მათ შექმნან D_{ν_3} სივრცეში ორთონორმირებული ბაზისი. $\varphi_n(x)$, $n = \nu_k + 1,\dots,\nu_{k+1}$, $k = 3,4,\dots$ ფუნქციათა ჯგუფი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად : თუ

$$n = \nu_k + (p-1)(\nu_k - 1)j,$$

$$1 \le p \le \nu_k, \quad 1 \le j = j(n) \le \nu_k - 1, \tag{62}$$

მაშინ $\varphi_n(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\Delta_{2^k}^p = \left(\frac{p-1}{v_k}, \frac{p}{v_k}\right)$ ინტერვალზე და

$$\varphi_n(x) = \psi_j^{v_k-1}\left(x, \Delta_{2^k}^p\right), \tag{63}$$

სადაც $\psi_j^{2N-1}(x, I)$ ფუნქციები განსაზღვრულია ლემა 1-ში.

ადვილი დასანახია, რომ მაშინ $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემაა და $\{\varphi_n\}_{n=1}^{v_k}$ ფუნქციები ქმნიან ბაზისს D_{v_k} $(k = 3,4,\dots)$ სივრცეში.

დავამტკიცოთ, რომ Φ სისტემა აკმაყოფილებს თეორემა 6-ის მოთხოვნებს. ყოველი $n > v_3$ რიცხვისთვის (იხილეთ (62))

$$1 \le j(n) \le \frac{1}{2} v_k - 1 \tag{64}$$

(შემოკლებისთვის ასეთ n რიცხვებს დავარქვათ „(64) სახის რიცხვები“). აღვნიშნოთ ξ_n-ით $\psi_j^{v_k-1}\left(x, \Delta_{2^k}^p\right)$ ფუნქციის ნიშნის არსებითად ცვლილების წერტილი.

თუ $\left(\frac{p-1}{v_k} + \frac{5}{8v_k} + \frac{p-1}{v_k} + \frac{7}{8v_k}\right)$, $k = 3,4,\dots$ $p = 1,2,\dots,v_k$ ინტერვალს აღვნიშნავთ $\delta_{2^k}^p$ -ით, მაშინ პირობა 2)-დან, ლემა 5-დან და ტოლობა (63)-დან პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{n=v_k+(p-1)(v_k-1)+1}^{m_{k,p}(x)} \varphi_n(x) \ge c v_k 2^k \quad \text{თ.ყ} \quad x \in \delta_{2^k}^p, \tag{65}$$

სადაც

$$m_{k,p}(x) = \max\{m:\ \xi_m < x,\ m = v_k + (p-1)(v_k - 1) + 1, \dots, v_k + p(v_k - 1)\}.$$

დავაფიქსიროთ $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $b_k \ge 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$ მიმდევრობა, და ავაგოთ (56) მწკრივის თითქმის ყველგან განშლადი გადანაცვლება. თუ ავღნიშნავთ $\chi(x,k)$, $k = 3,4,\dots$, $\bigcup_{p=1}^{v_k} \delta_{2^k}^p$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას, ადვილი დასანახი იქნება, რომ $\chi(x,k)$ ფუნქციები დამოუკიდებელია და

$$\int_0^1 \chi(x,k)\,dx = \frac{1}{4}, \quad k = 3,4,\dots$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k \chi(x,k) = \infty \quad \text{თ.ყ} \quad x \in (0;1). \tag{66}$$

დავუშვათ $\{c_k\}_{k=3}^{\infty}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ $0 \le c_k \le b_k$, $\sum_{k=3}^{\infty} c_k = \infty$, $\sum_{k=3}^{\infty} c_k^2 < \infty$. მაშინ $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4} c_k = \infty$ და $\sum_{k=3}^{\infty} c_k \left[\chi(x,k) - \frac{1}{4}\right]$ მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან, როცა $x \in (0;1)$ (რადგან $\left\{\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\chi(x,k) - \frac{1}{4}\right]\right\}_{k=3}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ დამოუკიდებელ ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემაა). ეს იმას ნიშნავს, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi(x,k)$ მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან $x \in (0;1)$, საიდანაც $0 \le c_k \chi(x,k) \le b_k \chi(x,k)$ პირობის თანახმად ვიღებთ (66).

(66) უტოლობის გამოყენებით, ვიპოვოთ ისეთი k_s , $s = 1,2,\dots (3 \le k_1 < k_2 < \cdots)$ მიმდევრობა, რომ $s = 1,2,\dots$ -თვის

$$m\left\{x \in (0;1) \ : \ \sum_{k=k_s}^{k_{s+1}-1} b_k \chi(x,k) > s\right\} > 1 - \frac{1}{s} . \tag{67}$$

ჩვენთვის საჭირო $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ გადანაცვლება იქნება ისეთი, რომ

$$\{\sigma(n)\}_{n=v_{k_s}+1}^{v_{k_{s+1}}} = \{n\}_{n=v_{k_s}+1}^{v_{k_{s+1}}} , \ \ s = 1,2,\dots,$$

ხოლო ფიქსირებული s-თვის $\varphi_n(x)$, $n = v_{k_s} + 1, \dots, v_{k_{s+1}}$ ფუნქციები გადავანაცვლოთ შემდეგნაირად:

$a_n \varphi_n(x)$ ფუნქციები „(64)-ის სახის“ ნომრებით გადანაცვლდებიან ნიშნის არსებითად ცვლილების წერტილების ზრდადობის მიხედვით, ანუ ისე, რომ $\xi_{\sigma(n_1)} < \xi_{\sigma(n_2)}$ უტოლობიდან გამომდინარეობდეს $n_1 < n_2$ უტოლობა.

$a_n \varphi_n(x)$ ფუნქციები, რომელთათვისაც $j(n)$ რიცხვი (69) გაშლაში არ აკმაყოფილებენ (64) უტოლობას, დავალაგოთ ნებისმიერი წესით „(64)-ის სახის“ ფუნქციების შემდეგ. განვიხილოთ ჯამი

$$G_s(x) = \sum_{n=v_{k_s}+1}^{M_s(x)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) , \tag{68}$$

სადაც

$$M_s(x) = max\left\{m : \ \xi_{\sigma(n)} < x\ ,\ \ m = v_{k_s} + 1, \dots , v_{k_{s+1}}\right\}.$$

როცა $x \in (\xi_n; 1)$, $\varphi_n(x) \geq 0$, ამიტომ σ გადანაცვლების ყველა შესაკრები (68) ჯამში არაუარყოფითია. საიდანაც (65) უტოლობის გათვალისწინებით, გამოგვყავს,რომ თითქმის ყველგან როცა $x \in (0; 1)$

$$G_s(x) \geq c \sum_{k=k_s}^{k_{s+1}-1} b_k \chi(x, k).$$

უკანასკნელი უტოლობიდან და (67)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$m\,\{x \in (0; 1) :\ G_s(x) > cs\,\} > 1 - \frac{1}{s}\ , \qquad s = 1,2, \dots,$$

ანუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$ მწკრივი განშლადია თითქმის ყველგან.

თეორემა 6 დამტკიცებულია.

§3. თითქმის ყველგან კრებადობის ქვემიმდევრობები

კარგადაა ცნობილი, რომ ორთოგონალური მწკრივები კოეფიციენტებით l^2 სივრციდან შეიძლება განშლადი იყვნენ თითქმის ყველგან (0;1)-ზე. ამასთანავე ნებისმიერი $\Phi = \{\varphi_n\}$ ორთონორმირებული სისტემისათვის თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{69}$$

ჯამის ზომით კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ $S_{N_k}, k = 1,2, \dots$ ჯამების რომელიღაც ქვემიმდევრობა თითქმის ყველგან კრებადია. ამასთან, სულაც არ არის აშკარა, რომ მოცემული Φ სისტემის N_k-თვის ნომრები შეიძლება ავარჩიოთ (69) მწკრივის კოეფიციენტებისგან დამოუკიდებლად. თუმცა ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ,რომ ნომრების ასეთი შერჩევა შესაძლებელია.

თეორემა 7. ნებისმიერი $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0; 1)$ ორთონორმირებული სისტემისათვის

მოიძებნება ნატურალურ რიცხვთა ისეთი ზრდადი $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, რომ (69) სახის ნებისმიერო $S_{N_k}(x) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n\varphi_n(x)$, $k = 1,2,\dots$, მწკრივისთვის მიმდევრობა კრებადია თითქმის ყველგან (0;1)-ზე და სამართლიანია უტოლობა

$$\left\| \underset{1\le q<\infty}{suo} \left|S_{N_q}(x)\right| \right\|_2 \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}. \tag{70}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ Φ სისტემის ფუნქციების შემდეგი წარმოდგენა ჰაარის სისტემის საშუალებით

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x), \qquad b_{n,j} = \int_0^1 \chi_j(x)\varphi_n(x)dx, \quad n,j = 1,2,\dots.$$

პარსევალის ტოლობის და ჰაარის სისტემის სისრულიდან გამომდინარე გვექნება

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j}^2 = \|\varphi_n\|_2^2 = 1\,, \quad n = 1,2,\dots, \tag{71}$$

ბესელის უტოლობით

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,j}^2 \le \left\|\chi_j\right\|_2^2 = 1\,, \quad j = 1,2,\dots\ . \tag{72}$$

ერთდროულად განვსაზღვროთ საძიებელი $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ და დამხმარე $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ მიმდევრობები. დავუშვათ $N_0 = \omega_0 = 0$, $N_1 = \omega_1 = 1$, და თუ N_k და ω_k რიცხვები აგებული არიან ყველა ნატურალური $k < k_0$-თვის, მაშინ N_{k_0} და ω_{k_0} შევარჩიოთ ისე, რომ $N_{k_0} > N_{k_0-1}$, $\omega_{k_0} > \omega_{k_0-1}$ და

$$1)\ \sum_{j=1}^{\omega_{k_0-1}} \sum_{n=N_{k_0}}^{\infty} b_{n,j}^2 < 4^{-k_0}\,; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{N_{k_0-1}} \sum_{j=\omega_{k_0}}^{\infty} b_{n,j}^2 < 4^{-k_0}. \tag{73}$$

ადვილი დასანახია, რომ თუ N_{k_0} და ω_{k_0} რიცხვებს ავიღებთ საკმაოდ დიდებს, მაშინ (73) უტოლობები შესრულებული იქნება.

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ,რომ მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x)\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \le 1\,, \tag{74}$$

თითქმის ყველგან კრებადია (0;1)-ზე. დაწვრილებით შევისწავლოთ აღნიშნული მწკრივის ზოგადი წევრი. სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) =$$

$$= \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x) =$$

$$= \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\left[\sum_{j=1}^{\omega_{k-1}} b_{n,j}\chi_j(x) + \sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} b_{n,j}\chi_j(x) + \sum_{j=\omega_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x)\right] =$$

$$:\ I_k^{(1)}(x) + I_k^{(2)}(x) + I_k^{(3)}(x)\,,$$

სადაც

$$a)\quad \left\|I_k^{(1)}(x)\right\|_2 = \left\|\sum_{j=1}^{\omega_{k-1}} \chi_j(x) \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\right\|_2 = \left\{\sum_{j=1}^{\omega_{k-1}}\left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\right)^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\sum_{j=1}^{\omega_{k-1}}\left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2\right)\left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_{n,j}^2\right)\right\}^{1/2} \le \left\{\sum_{j=1}^{\omega_{k-1}} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_{n,j}^2\right\}^{1/2} < 2^{-k}\,;$$

$$b)\quad \left\|I_k^{(3)}(x)\right\|_2 = \left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \sum_{j=\omega_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x)\right\|_2 \le$$

$$\le \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} |a_n| \left\|\sum_{j=\omega_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x)\right\|_2 \le$$

$$\le \left\{\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \left\|\sum_{j=\omega_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x)\right\|_2^2\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \left\{\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}\left(\sum_{j=\omega_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}^2\right)\right\}^{1/2} < 2^{-k}\,.$$

ამიტომ $k > 1$-თვის

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) = \sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} \chi_j(x)\left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\right) + \delta_k(x) = \sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} a_j^{(k)}\chi_j(x) + \delta_k(x)$$
$$=: f_k(x) + \delta_k(x)\,, \tag{75}$$

სადაც

$$\|\delta_k\|_2 \le 2\cdot 2^{-k}\,, \qquad a_j^{(k)} \coloneqq \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\,. \tag{76}$$

(75) და (76) თანაფარდობების ძალით

$$\sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} \left(a_j^{(k)}\right)^2 = \left\|\sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} a_j^{(k)}\chi_j(x)\right\|_2^2 \le \left\{\left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x)\right\|_2 + 2^{-k+1}\right\}^2 \le$$

$$\le 2\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2 + 2\cdot 2^{-2k+2}\,,$$

საიდანაც გამოდის, რომ

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=\omega_{k-1}+1}^{\omega_{k+2}} \left(a_j^{(k)}\right)^2 \le 3\,. \tag{77}$$

ლევის თეორემის ძალით (76) უტოლობიდან გამომდინარეობს $\sum_{k=2}^{\infty}|\delta_k(x)|$ მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა. გარდა ამისა

$$\left\|\sup_{2\le q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q}\delta_k(x)\right|\right\|_2 \le \left\|\sum_{k=2}^{\infty}|\delta_k(x)|\right\|_2 \le \sum_{k=2}^{\infty}\|\delta_k(x)\|_2 \le 1\,,$$

ამიტომაც

$$\left\|\sup_{1\le q<\infty}\left|S_{N_q}(x)\right|\right\|_2=\left\|\sup_{1\le q<\infty}\left|\sum_{k=0}^{q}\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}a_n\varphi_n(x)\right|\right\|_2\le$$

$$\le\|a_1\varphi_1\|_2+\left\|\sum_{n=2}^{N_2}a_n\varphi_n\right\|_2+\left\|\sup_{2\le q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q}\delta_k(x)\right|\right\|_2+\left\|\sup_{2\le q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q}f_k(x)\right|\right\|_2$$

$$\le 3+\left\|\sup_{2\le q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q}f_k(x)\right|\right\|_2 .$$

ამგვარად, მე-7 თეორემის დასამტკიცებლად, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\sum_{k=2}^{\infty}f_k(x)\,, \tag{78}$$

მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია, ამისათვის საკმარისია შევაფასოთ ნორმა $L^2(0;1)$ სივრცეში ამ მწკრივის კერძო ჯამთა მაჟორანტები. კარგადაა ცნობილი, რომ

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_j\chi_j(x)\,,\quad \sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty\,, \tag{79}$$

სახის ყველა მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან (0;1)-ზე, ხოლო მისი კერძო ჯამების მაჟორანტებისთვის ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left\|\sup_{1\le M<\infty}\left|\sum_{j=1}^{M}a_j\chi_j(x)\right|\right\|_2\le K\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{1/2}, \tag{80}$$

სადაც K აბსოლუტურად მუდმივია. მწკრივი (78) დავყოთ სამ მწკრივად :

$$\sum_{p=1}^{\infty}f_{3p-1}(x)+\sum_{p=1}^{\infty}f_{3p}(x)+\sum_{p=1}^{\infty}f_{3p+1}(x). \tag{81}$$

f_k ფუნქციების განმარტებიდან გამომდინარე (81)-ის თითოეული მწკრივი თ.ყ. კრებადია (0;1)-ზე და გვაქვს შეფასება

$$\left\|\sup_{2\le q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q}f_k(x)\right|\right\|_2\le\sum_{i=-1}^{1}\left\|\sup_{1\le M<\infty}\left|\sum_{p=1}^{M}f_{3p+i}(x)\right|\right\|_2\le 3\sqrt{3}k\,.$$

თეორემა 7 დამტკიცებულია.

შედეგი 5. ნებისმიერი $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემიდან, შესაძლებელია გამოვყოთ ქვესისტემა $\Phi_1 = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \cdots$, რომელიც არის კრებადობის სისტემა, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\left\|S_{\Phi_1}^*(\{a_k\},x)\right\|_2 \le C\|\{a_k\}\|_{l^2} ,$$

სადაც $S_{\Phi_1}^*$ კერძო ჯამების შესაბამისი სუპრემალური ოპერატორია, ხოლო $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ნებისმიერი მიმდევრობაა l^2 სივრციდან.

§4 . ინტეგრირებული ორთონორმირებული სისტემის თვისებები

შევნიშნოთ,რომ საკითხები ორთონორმირებული მწკრივების თანაბარი კრებადობის შესახებ, რომლებიც ბუნებრივად ჩნდებოდნენ ტრიგონომეტრიული და სხვა კლასიკური სისტემების შესწავლის დროს, ზოგადი ორთონორმირებული სისტემებისთვის საბოლოოდ ნაკლები შინაარსის მატარებელია. საქმე იმაშია, რომ ორთონორმირებული სისტემების ფუნქციები შეიძლება იყვნენ საკმაოდ „ცუდები“ , მაგალითად არ იყვნენ შემოსაზღვრულები. თუ განვიხილავთ ფუნქციათა სისტემას

$$F_n(y) = \int_0^y \varphi_n(x)dx\,, \quad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} - \text{ო. ნ. ს.} \quad \big(x,y \in (0;1)\big), \tag{82}$$

მაშინ აღმოჩნდება, რომ ასეთი სისტემებით შესაძლებელია მივიღოთ ზოგადი ხასიათის არატრივიალური თეორემები მწკრივთა თანაბარი კრებადობის შესახებ. კერძოდ აღმოჩნდება, რომ (82) სახის ნებისმიერი სისტემისათვის და თითქმის ყველგან $t \in (0;1)$-თვის თანაბრად კრებადია

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)F_n(y); \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)F_n(y), \tag{83}$$

მწკრივები, სადაც $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ რადემახერის სისტემაა, ხოლო $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ დამოუკიდებელი ნორმალურად განაწილებული ფუნქციებისაგან შემდგარი ორთონორმირებული სისტემაა. ჩვენ დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 8. ვთქვათ $\{\eta_n(t)\}_{n=1}^{\infty}, t \in (0;1)$ ნორმალურად განაწილებული ფუნქციებისგან შემდგარი ორთონორმირებული სისტემაა, ხოლო $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი ორთონორმირებული სისტემა, მაშინ თ.ყ. $t \in (0;1)$-თვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^y \varphi_n(x)\, dx \tag{84}$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია (y-ის მიმართ) $[0;1]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $a_n, n = 1,2,\dots$ რიცხვებისთვის, თუ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n(t)$ მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია და

$$\left\| \sup_{1 \le N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \eta_n(t) \right| \right\|_p \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}. \tag{85}$$

ბესელის უტოლობის ძალით

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(x) dx \right\}^2 \le \int_{\alpha}^{\beta} 1^2 dx = \beta - \alpha, \quad 0 \le \alpha < \beta \le 1, \tag{86}$$

კერძოდ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^y \varphi_n(x) dx \right\}^2 \le 1, \ \ 0 \le y \le 1. \tag{87}$$

(87) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული y-თვის (84) მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან $t \in (0;1)$-თვის, შესაბამისად

(*) არსებობს ისეთი $E_0 \subset (0;1)$, $m(E_0) = 1$, სიმრავლე, რომ (84) მწკრივი კრებადია ყოველი (t, y) წერტილების წყვილისთვის ისე, რომ $t \in E_0$, $y \in R_2$, სადაც $R_2 \coloneqq \left\{ \left\{ \frac{i}{2^k} \right\}_{i=0}^{2^k} \right\}_{k=0}^{\infty}$.

ვთქვათ

$$S_N(t,y) = \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t) \int_0^y \varphi_n(x) dx. \tag{88}$$

დავუშვათ, π_m წერტილების შემდეგი სიმრავლეა: $\pi_m = \left\{\frac{2s-1}{2^{m+1}}\right\}_{s=1}^{2^m}$, $m = 1,2,\dots$.

ყოველი $y = \frac{2s-1}{2^{m+1}} \in \pi_m$-თვის ავღნიშნოთ

$$p_m(t,y) = \sup_{1\le N<\infty} \left|S_N(t,y) - S_N\left(t,\frac{s-1}{2^m}\right)\right| \tag{89}$$

და

$$R_m(t) = \max_{y\in\pi_m} p_m(t,y)\,. \tag{90}$$

ვითვალისწინებთ რა $\int_0^y \varphi_n(x)$ ფუნქციების უწყვეტობას და იმ ფაქტს, რომ $S_N(t,0) = 0$, $t \in (0;1)$ და $N = 1,2,\dots$, -თვის , $R_m(t)$ რიცხვების განსაზღვრებიდან მივიღებთ, რომ ყოველი ფიქსირებული $t \in (0;1)$-თვის

$$\|S_N(t,y)\|_C \le \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t)\,, \quad N = 1,2,\dots, \tag{91}$$

$$\left|S_N(t,y) - S_N\left(t,\frac{i-1}{2^k}\right)\right| \le \sum_{m=k}^{\infty} R_m(t), \qquad y \in \left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right), \tag{92}$$

$$i = 1,2,\dots,2^k, \quad N = 1,2,\dots\ .$$

(92) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (84) მწკრივის თანაბარ კრებადობას ადგილი აქვს ნებისმიერი $t \in E_0$-თვის, რომლისთვისაც

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t) < \infty\,. \tag{93}$$

მართლაც, თუ $t \in E_0$-თვის სრულდება (93) თანაფარდობა, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის, მოიძებნება ჯერ ისეთი $k = 1,2,\dots$, რომ $\sum_{m=k}^{\infty} R_m(t) < \frac{\varepsilon}{3}$,ხოლო შემდეგ (*)-ის გათვალისწინებით, ვიპოვით ისეთ N_0 რიცხვს, რომ ნებისმიერი $N > N_0$ და $N' > N_0$-თვის $\frac{i}{2^k}$, $i = 0,1,\dots,2^k$ სახის ყველა წერტილში სრულდება უტოლობა

$$\left|S_{N'}\left(t,\frac{i}{2^k}\right) - S_N\left(t,\frac{i}{2^k}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

მაშინ (90)-დან გამომდინარეობს,რომ $N' > N_0$ და $N > N_0$ -თვის

$$|S_{N'}(t,y) - S_N(t,y)| < \varepsilon \quad \text{ნებისმიერი } y \in [0;1] - \text{თვის}.$$

ამრიგად თეორემა (8)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ,რომ (93) უტოლობა სამართლიანია $t \in (0;1)$-თვის თითქმის ყველგან.

თავდაპირველად დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $y = \frac{2S-1}{2^{m+1}} \in \pi_m$ წერტილი. მაშინ $p_m(t,y)$ ფუნქციისთვის, (89) შეფასებაში, სამართლიანია ტოლობა

$$p_m(t,y) = \sup_{1 \le N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t) \int_{(s-1)/2^m}^{y} \varphi_n(x)dx \right|,$$

საიდანაც (85) და (86) შეფასების ძალით გამოდის, რომ

$$\left\{ \int_0^1 [p_m(t,y)]^p \, dt \right\}^{1/p} \le C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{(s-1)/2^m}^{y} \varphi_n(x)dx \right]^2 \right\}^{1/2} \le C \cdot 2^{-m/2}. \qquad (94)$$

(94)-დან გამომდინარეობს უტოლობა $m\{t \in (0;1) \;:\; |f(t)| > z\} \le \left(\frac{\|f\|_p}{z}\right)^p$, მივიღეთ, რომ ნებისმიერი $y \in \pi_m$-თვის

$$m\left\{t \in (0;1):\; p_m(t,y) > 2^{\frac{m}{2p}\left(1-\frac{p}{2}\right)}\right\} \le C^p 2^{\frac{-mp}{2}} 2^{\frac{m}{2}\left(-1+\frac{p}{2}\right)},$$

ამიტომაც

$$m\left\{t \in (0;1):\; R_m(t) > 2^{\frac{m}{2p}\left(1-\frac{p}{2}\right)}\right\} \le 2^m \left[C^p 2^{\frac{-mp}{2}} 2^{\frac{m}{2}\left(-1+\frac{p}{2}\right)}\right] = C^p 2^{m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}p\right)} = C' 2^{-\gamma m},$$

სადაც $\gamma = \gamma(p) > 0$. უკანასკნელი შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left\{t \in (0;1):\; R_m(t) > 2^{\frac{m}{2p}\left(1-\frac{p}{2}\right)}\right\} < \infty.$$

მაშასადამე თ.ყ. $t \in (0;1)$-თვის $R_m(t) \le 2^{\frac{m}{2p}\left(1-\frac{p}{2}\right)}$, როცა $m > m(t)$ და შესაბამისად თ.ყ. $t \in (0;1)$ რა თქმა უნდა $\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t)$ ჯამიც თითქმის ყველგან სასრულია. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს მე-8 თეორემის მტკიცება.

განვიხილოთ $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y)$ ჯამის ზოგიერთი თვისება, სადაც $F_n(y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია (82) ტოლობით.

თუ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა სრულია, მაშინ პარსევალის ტოლობის მიხედვით

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^y \varphi_n(x)dx\right]^2 = y.$$

დამოუკიდებელი ორთონორმირებული სისტემების შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 9. ნებისმიერი $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $, x \in (0;1)$ ორთონორმირებული სისტემისთვის ჯამი

$$S(y) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y)\,, \qquad y \in [0;1]\,,$$

უწყვეტია და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას რიგით ${}^1/_2$.

ბესელის უტოლობის გამოყენებით, ვიღებთ

$$|S(y) - S'(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}[F_n^2(y) - F_n^2(y')]\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|F_n(y) - F_n(y')|\cdot|F_n(y) + F_n(y')|$$

$$\le \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(y) - F_n(y')|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y)^2\right\}^{1/2}$$

$$+\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(y) - F_n(y')|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}F_n(y')^2\right\}^{1/2} \le 2|y - y'|^{1/2}\,,$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

როგორც $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემის მაგალითი გვიჩვენებს, რომელშიც $\varphi_1(x) = c(1-x)^{(\varepsilon-1)/2}$, $0 < x < 1$, $(0 < \varepsilon < 1)$, ხოლო $\varphi_n(x)$, $n = 2,3,\ldots$, ფუნქციები ნულოვანია $x > \frac{1}{2}$-ზე , ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის მოიძებნება $\{\varphi_n\}$ ორთოორმირებული სისტემა, რომლისთვისაც

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^y \varphi_n(x)dx\right]^2 \notin Lip\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\,,$$

ანუ სიგლუვის მაჩვენებელი თეორემა 9-ში ზუსტია.

დასკვნა

ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა. მასში გადმოცემულია ზოგადი ორთონორმირებული მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობასთან დაკავშირებული ზოგიერთი პრობლემატიკა. სახელდობრ, გადმოცემულია საკითხის ისტორია და განვითარების ზოგიერთი ძირითადი ეტაპი.

აღნიშნული საკითები ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხებია ფუნქციათა თეორიაში. მის განვითარებაში არსებითი წვლილი შეიტანა მე-20 საუკუნის დიდმა მათემატიკოსებმა: ლუზინმა, კოლმოგოროვმა, კარლესონმა, მენშოვმა, რადემახერმა და სხვამ.

ნაშრომში მოყვანილია მენშოვ-რადემახერის, კოლმოგოროვის, ტანდორის, მარცინკევიჩის თეორემები ზოგადი ორთონორმირებული მწკრივების თითქმის ყველგან კრებადობის შესახებ. აგრეთვე ინტეგრირებული ორთონორმირებულ სისტემასთან დაკავშირებული თანაბრად კრებადობის საკითხები.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ზოგადი ორთონორმირებული სისტემებისთვის თითქმის ყველგან კრებადობის თემატიკა ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა ფუნქციათა თეორიაში.

ლიტერატურა

Б. С. Кашин, А. А. Саакян – Ортогональные ряды, Издательство АФЦ, Москва 1999.