ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ავტორი: თინათინ დალაქიშვილი

დამოუკიდებელი ფუნქციები და მათი ზოგიერთი გამოყენება

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასისტენტ-პროფესორი

მათემატიკის დოქტორი

შალვა ზვიადაძე

თბილისი

2019

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა. მასში გადმოცემულია კლასიკური შედეგები დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ ფუნქციათა თეორიაში. კერძოდ, მოყვანილია კლასიკური შედეგები ფუნქციონალური მწკრივების ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას: ზომით, თითქმის ყველგან და ნორმით კრებადობის შესახებ. აგრეთვე, თეორემები უპირობო კრებადობებისა და ფუნქციურ სივრცეში უპირობო ბაზისების შესახებ.

Summery

This thesis is a review of academic literature for a master's degree. In this work we describe classical results on the sequences of independent functions and their applications. In particular, there is given classical results on almost everywhere, norm and measure convergence for almost all choices of signs of functional sequences. Also, we refer to the theorems about unconditional convergence and unconditional bases in functional spaces.

შესავალი

ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა, მასში გადმოცემულია კლასიკური შედეგები დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ ფუნქციათა თეორიაში.

ალბათობის თეორიის ტერმინებში დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლის განსაზღვრება სხვა არაფერია თუ არა (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა სიმრავლე. ალბათობის ტერმინებშივე შეიძლება ჩამოყალიბდეს ნაშრომში შეყვანილი თითქმის ყველა თეორემა. მაგალითისთვის თეორემა 4, რომელშიც მტკიცდება, რომ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი ტოლია იმავე შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის.

ნაშრომში მოყვანილი დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობის აგების მეთოდი გამოყენებულია წინა საუკუნის ოცდაათიან წლებში პოლონელ მათემატიკოსთა შრომებში, ესენი არიან შტეინჰაუზი, მარცინკევიჩი, ზიგმუნდი და სხვანი. აღნიშნული საკითხის დისკრეტული ვარიანტი გვხვდება კოლმოგოროვისა და ხინჩინის შრომაში. მოყვანილი (შესაძლებელია მოძველებული) მეთოდი ბუნებრივია ფუნქციათა თეორიისთვის. მას ის უპირატესობაც აქვს, რომ არ საჭიროებს დამატებით ცნობებს ზომის თეორიიდან.

1922 წელს რადემახერმა შემოიღო $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციების განსაზღვრება, რომლებიც დღეს მის სახელს ატარებენ. თუმცა, $\sum_{n=1}^{N} r_n(x)$ სახის კერძო ჯამების ყოფაქცევის საკითხს, როცა $N \to \infty$ და $x \in (0;1)$ გაცილებით ადრეც სწავლობდნენ ნამდვილი რიცხვების ორობით დაშლებთან დაკავშირებით.

თეორემა 5 და თეორემა 6 რადემახერის სისტემის შემთხვევაში მიღებული ქონდა ხინჩინს 1923 წელს, ხოლო მოგვიანებით აღნიშნული შედეგები გაავრცელეს დამოუკიდებელ ფუნქციათა სხვა სისტემებზეც. ხინჩინის უტოლობის ყველაზე ზოგადი სახე თეორემა 6 მიიღეს მარცინკევიჩმა და ზიგმუნდმა 1937 წელს. თეორემა 7 მიიღეს პელიმ და ზიგმუნდმა როგორც ხინჩინის უტოლობის და მარტივი მაგრამ მნიშვნელოვანი ლემა 1-ის უშუალო შედეგი. თეორემა 8 და თეორემა 9 ეკუთვნის კოლმოგოროვს. მანვე მიიღო შემდეგი უტოლობა, რომელიც მისსავე სახელს ატარებს

$$m(\{x \in (0;1): S_{\Psi}^{*}(\{a_n\}) > y\}) \leq \frac{1}{y^2} \sum a_n^2, \qquad y > 0.$$

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ მაჟორანტების შეფასების მეთოდი, რომელიც მოგვცა კოლმოგოროვმა, ძალზედ მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ალბათობის თეორიასა და ფუნქციათა თეორიაში. ფუნქცია

$$m\left(\left\{x\in(0;1):\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Psi_n(x)\right|\geq\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{1/2}\right\}\right)\geq c>0,$$

მოყვანილ თეორემა 8 დაამტკიცეს მარცინკევიჩმა და ზიგმუნდმა, მაგრამ მისი მიღება ასევე შესაძლებელია მოყვანილი წინა კოლმოგოროვის უტოლობის მოდიფიკაციითაც.

წინადადება 1, რომელიც კლასიკური ბორელ-კანტელის ლემის გაძლიერებული ვარიანტია გამოიყენება არამხოლოდ ანალიზში, არამედ რიცხვთა თეორიაშიც.

დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემის თვისებების გამოყენება ფუნქციონალური მწკრივების შესასწავლად თითქმის ერთდროულად დაიწყეს ორლიჩმა, პელიმ და ზიგმუნდმა. შემთხვევითი მწკრივები დღესდღეობით თამაშობენ უმნიშვნელოვანეს როლს ორთოგონალურ მწკრივთა თეორიასა და ფუნქციონალურ ანალიზში.

$\sum f_n$ მწკრივის ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევის დროს ზომით კრებადობიდან რომ გამომდინარეობს $\sum {f_n}^2$ მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა დაამტკიცა ორლიჩმა, ხოლო $\sum {f_n}^2$ მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობიდან რომ გამომდინარეობს $\sum f_n$ მწკრივის ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას თითქმის ყველგან კრებადობა დაამტკიცეს პელიმ და ზიგმუნდმა (იხილეთ ნაშრომში თეორემა 11).

$\sum f_n$ მწკრივის ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას L^p სივრცეში კრებადობისთვის აუცილებელი პირობა მიიღო ორლიჩმა, ხოლო საკმარისობა მოგვიანებით პელიმ და ზიგმუნდმა. (იხილეთ ნაშრომში თეორემა 12).

ცნობილი ფაქტი, რომ L^1 სივრცეში არ არსებობს უპირობო ბაზისი, პირველად დაამტკიცა პელჩინსკიმ (იხილეთ თეორემა 13).

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული თეორემების დამტკიცების ქვაკუთხედად არის ქცეული ნაშრომში განხილული დამოუკიდებელ ფუნქციათა თვისებები.

§1. დამოუკიდებელი ფუნქციების მიმდევრობის განსაზღვრა და აგება

განსაზღვრება 1. (0;1) შუალედში განსაზღვრულ $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ ნამდვილ და ზომად ფუნქციათა ერთლობლიობას ეწოდება დამოუკიდებელი ფუნქციების სიმრავლე, თუ ყოველი $I_n, n \in \{1,2,\ldots,N\}$ რიცხვითი ინტერვალისთვის სამართლიანია ტოლობა

$$m\big(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\ldots,N\}\}\big) =$$
$$= \prod_{n=1}^{N} m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n\}). \qquad (1)$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას ეწოდება დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობა, თუ სიმრავლე $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ არის დამოუკიდებელი ფუნქციების სიმრავლე ყოველი $N \in \{1,2,\ldots\}$ რიცხვისთვის.

μ ზომიან X სივრცეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა დამოუკიდებლობა განისაზღვრება განსაზღვრება 1-ის ანალოგიურად. კერძოდ, როგორც განსაზღვრება 1-ში, შეგვიძლია შემოვიღოთ დამოუკიდებელი ფუნქციები $G \subset \mathbb{R}^q$ სიმრავლეზე, ლებეგის q განზომილებიანი ზომით $m(G) = 1$. თუ G სიმრავლის ზომა, რომელზეც განსაზღვრულია f_n ფუნქციები, არ არის 1-ის ტოლი, (მაგრამ დადებითია და სასრული), მაშინ ფუნქციათა სიმრავლის დამოუკიდებლობა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ არის დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლე, თუ ყოველი I_n, $n \in \{1,2,\ldots,N\}$ ინტერვალისთვის გვაქვს:

$$m(\{x \in G : f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\ldots,N\}\}) =$$
$$= [m(G)]^{-N+1} \prod_{n=1}^{N} m(\{x \in G : f_n(x) \in I_n\}). \qquad (2)$$

განსაზღვრება 2. $E_n \subset (0;1)$ ზომადი $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ სიმრავლეების მიმდევრობას ეწოდება დამოუკიდებელი სიმრავლეების მიმდევრობა, თუ ამ სიმრავლეთა $\{\chi_{E_n}\}_{n=1}^{\infty}$ მახასიათებელი ფუნქციები ადგენენ დამოუკიდებელი ფუნქციების მიმდევრობას (შემოკლებით დ.ფ.მ.).

დამოუკიდებელი ფუნქციების მიმდევრობებს მრავალი გამოიყენება აქვს ალბათობის თეორიაში. ამის გარდა, დამოუკიდებლობის ცნება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფუნქციათა თეორიაშიც. თუმცა ორთოგონალური სისტემები, რომლებიც შედგებიან დამოუკიდებელი ფუნქციებისაგან, წარმოადგენენ ორთოგონალური სისტემების საკმაოდ სპეციალურ და ვიწრო კლასს, რომლებიც შეუცვლელნი არიან მრავალ ამოცანაში.

განსაკუთრებით ხშირად გამოიყენება უმარტივესი, არატრივიალური, დამოუკიდებელი ფუნქციების მიმდევრობა ე.წ. რადემახერის სისტემა.

ჩვენ დავამტკიცებთ წინადადებებს დ.ფ.მ.–ს შესახებ, რომლებიც გამოიყენება ფუნქციონალური მწკრივების კრებადობისას. დავიწყოთ დამოუკიდებელი ფუნქციების სისტემის ზოგიერთი კლასის ცხადი სახით აგება.

თეორემა 1. დავუშვათ, ყოველი ნატურალური რიცხვისთვის $n \in \{1,2,\ldots\}$ მოცემულია მიმდევრობები $\lambda_{s,n}$ და $\mu_{s,n}$, $s \in \{1,2,\ldots\}$ სადაც $\lambda_{s,n} \neq \lambda_{s',n}$ როცა $s \neq s'$, $\mu_{s,n} \geq 0$, და მწკრივი $\sum_{s=1}^{\infty} \mu_{s,n}=1$ ყოველი n რიცხვისთვის. მაშინ არსებობს დამოუკიდებელ უბან-უბან მუდმივ ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$ ისეთი, რომ

$$m\left(\left\{x \in (0;1): f_n(x)=\lambda_{s,n}\right\}\right)=\mu_{s,n}, \quad s,n \in \{1,2,\ldots\}. \tag{3}$$

საძიებელი მიმდევრობა $\{f_n\}$ ავაგოთ ინდუქციურად: თუ g განსაზღვრულია ინტერვალზე $I=(a;b)$ და $I'=(a';b')$ მისგან განსხვავებული ინტერვალია, მაშინ $T_{I\to I'}(g,x)$ აღნიშნავს ფუნქციას განსაზღვრულს I' -ზე:

$$T_{I\to I'}(g,x)=g\left(a+\frac{x-a'}{b'-a'}(b-a)\right), \quad x \in I'. \tag{4}$$

ჩვენ განვსაზღვრავთ $\{f_n\}$-ს თითქმის ყველა x რიცხვისთვის (0;1) სიმრავლიდან, რადგან ნული ზომის სიმრავლეზე ფუნქციების შეცვლით დამოუკიდებლობის თვისება არ ირღვევა.

უპირველეს ყოვლისა, შემოვიღოთ დამხმარე ფუნქციები:

$$g_n(x)=\lambda_{s,n}, \qquad \text{როცა } x \in \left(\sum_{p=1}^{s-1}\mu_{p,n}\,;\,\sum_{p=1}^{s}\mu_{p,n}\right), \qquad s \in \{1,2,\ldots\}. \tag{5}$$

(აქ ვგულისხმობთ, რომ $\sum_{p=1}^{0} \equiv 0$). განვსაზღვროთ f_1 შემდეგი წესით: $f_1(x)=g_1(x)$ და თუ დამოუკიდებელი, უბან-უბან მუდმივი $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ ფუნქციების სიმრავლე უკვე აგებულია, მაშინ f_{N+1} ფუნქციის ასაგებად უნდა გავითვალისწინოთ ინტერვალები $\{\delta_i\}(m(\cup_i \delta_i)=1)$, რომელზეც ფუნქცია f_N მუდმივია და დავუშვათ, რომ

$$F_{N+1}(x)=T_{(0;1)\to\delta_i}(g_{N+1},x), \; x \in \delta_i, i=\{1,2,\ldots\}. \tag{6}$$

ცხადია, რომ f_{N+1} არის უბან-უბან მუდმივი და ყოველი δ_i ინტერვალისთვის f_N-ის მუდმივობის ინტერვალებიდან და ყოველი I_{N+1} ინტერვალისთვის გვექნება:

$$m(\{x \in \delta_i: f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\})=m(\delta_i)m(\{x \in (0;1): f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\}). \tag{7}$$

შევნიშნოთ ასევე, რომ f_n ფუნქციის აგებულებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს რომ

(*) $f_n(x)$ ფუნქციები, $1 \leq n \leq N$, არიან მუდმივი f_{N+1} ფუნქციის ნებისმიერ მუდმივობის ინტერვალზე.

(7)-დან და (*)-დან გამომდინარე ყოველი I_n, $n \in \{1,2,\dots,N+1\}$ ინტერვალთა სიმრავლისთვის გვაქვს :

$$m \equiv m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\dots,N+1\}\}) =$$
$$= m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\}) \times$$
$$\times\, m(\{x \in (0;1): f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\}). \qquad (8)$$

ჩვენ ახლა $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ სიმრავლის დამოუკიდებლობის გამოყენებით (8) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$m = \prod_{n=1}^{N+1} m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n\}).$$

აქედან ჩვენ ვამტკიცებთ $\{f_n\}_{n=1}^{N+1}$ სიმრავლის დამოუკიდებლობას. თეორემა 1 დამტკიცებულია.

მუდმივ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = \lambda_n = const.$$

არის იმ სისტემების ტრივიალური მაგალითი, რომელთანაც მივყავართ თეორემა 1-ში მოყვანილ აგებას იმ შემთხვევაში თუ $\mu_{s,n}, s \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვებიდან მხოლოდ ერთია არანულოვანი ყოველი n-ისთვის. თეორემა 1-ის უმარტივესი არატრივიალური შემთხვევა არის როდესაც ყოველი n-ისთვის, $\mu_{s,n}$ რიცხვებიდან ორი რიცხვი არის ნულისგან განსხვავებული: $\mu_{1,n} = \mu_{2,n} = \frac{1}{2}$. თუ ამავდროულად ვიგულისხმებთ, რომ $\lambda_{1,n} = 1$, $\lambda_{2,n} = -1$, მოცემული კონსტრუქცია თეორემა 1-ში მიგვიყვანს დამოუკიდებელ ფუნქციათა უმნიშვნელოვანეს მიმდევრობასთან - ეგრეთ წოდებულ რადემახერის სისტემასთან $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

განსაზღვრება 3: $n \in \{1,2,\dots\}$ ნატურალური რიცხვებისთვის რადემახერის ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$r_n(x) = \begin{cases} 1\,,\ x \in \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) = \Delta_n^i\,,\ i\ \textit{კენტია} \\ -1,\ x \in \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) = \Delta_n^i,\ i\ \textit{ლუწია} \end{cases} \quad i \in \{1,2,\dots,2^n\}. \qquad (9)$$

შემდგომში უფრო მოსახერხებელია ჩავთვალოთ, რომ $r_0(x) = 1$, $x \in (0;1)$ და $r_n\left(\frac{i}{2^n}\right) = 0$, $i \in \{0,1,\dots,2^n\}$, $n \in \{0,1,2\dots\}$. მაშინ რადემახერის ფუნქციების უფრო კომპაქტური განსაზღვრება შესაძლებელია შემდეგი ფორმულით

$$r_n(x) = sign(sin 2^n \pi x), \qquad x \in [0;1], \qquad n \in \{0,1,\dots\}. \qquad (10)$$

შედეგი 1. $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ ფუნქციები არიან დ.ფ.მ.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, რადემახერის სისტემა არის იმ სისტემათა კერძო შემთხვევა, რომლებიც აიგება თეორემა 1-ში მოცემული კონსტრუქციით.

$r_n(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები უშუალოდაა დაკავშირებული x-ის ორობით დაშლასთან. ავიღოთ ორობით-ირაციონალური $x \in (0;1)$. იგი გამოისახება როგორც უსასრულო ორობითი წილადი :

$$x = 0,\theta_1\theta_2,\ldots, \text{ სადაც } \theta_p = \theta_p(x) = 0 \text{ ან } 1. \tag{11}$$

მაშინ $x = \sum_{p=1}^{\infty} \theta_p\, 2^{-p}$, და ამრიგად ყოველი $n \geq 1$

$$\sum_{p=1}^{n} \theta_p\, 2^{-p} < x < \sum_{p=1}^{n} \theta_p\, 2^{-p} + \sum_{p=n+1}^{\infty} 2^{-p} = \sum_{p=1}^{n} \theta_p\, 2^{-p} + 2^{-n}. \tag{12}$$

წინა უტოლობიდან გამომდინარე გვექნება

$$\frac{\theta_n(x) + 2m}{2^n} < x < \frac{\theta_n(x) + 2m + 1}{2^n}, \tag{13}$$

სადაც $m \geq 0$ არის მთელი რიცხვი. (9) და (12) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლობას $\theta_n(x) = 0$ ადგილი აქვს მხოლოდ იმ ორობით-ირაციონალური x-ისთვის, რომელთათვისაც $r_n(x) = 1$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სამართლიანია შეფასება :

$$r_n(x) = 1 - 2\theta_n(x) = (-1)^{\theta_n(x)},$$

$$x \in (0;1), \qquad x \neq \frac{i}{2^k}, \qquad 1 \leq i, k < \infty. \tag{14}$$

დამოუკიდებელი ფუნქციების აღწერიდან, შედეგი 1-დან და (14) ტოლობიდან გამომდინარეობს

შედეგი 2. $\theta_n(x)$ ფუნქციები, $n \in \{1,2,\ldots\}$ რომლებიც განსაზღვრულია (11) ფორმულით ქმნიან დ.ფ.მ.-ს.

შედეგი 2-ის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ დამოუკიდებელ და $[0;1]$-ზე თანაბრად განაწილებულ ფუნქციათა თანმიმდევრობა $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ე.ი. ფუნქციები, რომელთათვისაც

$$m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I\}) = m(I), \qquad n \in \{1,2,\ldots\}, \tag{15}$$

ყოველი $I \subset (0;1)$ ინტერვალისთვის . ამისათვის ჩვენ უნდა დავყოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო რაოდენობის თანაუკვეთ მიმდევრობებად: $\Lambda_n : \Lambda_n = \{k_{s,n}\}_{s=1}^{\infty}$, $n \in \{1,2,\ldots\}$ და როცა $x \in (0;1)$ და $x \neq \frac{i}{2^k}$, ჩვენ დავუშვებთ, რომ:

$$f_n(x) = 0,\theta_{k_{1,n}}(x)\theta_{k_{2,n,}}(x)\ldots, \quad n \in \{1,2\ldots\}. \tag{16}$$

ე.ი.

$$f_n(x) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s}\, \theta_{k_{s,n,}}(x), \qquad n \in \{1,2,\ldots\} \tag{17}$$

სადაც $\theta_n\,(x)$ განსაზღვრულია (11)-ის მიხედვით.

თეორემა 2. ფუნქციები $f_n,\ n \in \{\,1,2,\dots\}$, რომლებიც განსაზღვრულია (16) ტოლობით, აკმაყოფილებენ (15) პირობას და ქმნიან დ.ფ.მ.-ს.

დამტკიცება. f_n ფუნქციების ზომადობა გამომდინარეობს უშუალოდ მე-(17) ტოლობიდან. დავამტკიცოთ f_n ფუნქციების დამოუკიდებლობა და ამავდროულად შევამოწმოთ (15) ტოლობა ნებისმიერი $I \subset (0;1)$ ინტერვალისთვის. დავაფიქსიროთ ნატურალური N და განვიხილოთ ორობითი ინტერვალების სიმრავლე:

$$\omega_{n=}\left(\frac{i_n-1}{2^{m_n}},\frac{i_n}{2^{m_n}}\right) \subset (0;1), \qquad 1 \le i_n \le 2^{m_n}, \quad n \in \{1,\dots,N\}.$$

დავუშვათ, $\frac{i_n-1}{2^{m_n}}$ რიცხვების ორობით ჩაწერას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{i_n-1}{2^{m_n}}=\sum_{s=1}^{m_n}\varepsilon_{s,n}2^{-s} \quad ,\varepsilon_{s,n} \in \{0;1\}.$$

მაშინ f_n ფუნქციების განმარტებიდან (იხ. (16) და (17)) გამომდინარეობს, რომ $f_n(x) \in \omega_n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\theta_{k_{s,n}}(x)=\varepsilon_{s,n},\ 1 \le \mathrm{s} \le m_n$, ამიტომ გვექნება:

$$m(\{x \in (0;1)\colon f_n\,(x) \in \omega_n, \qquad n \in \{1,2,\dots,N\}\})=$$
$$=m\left(\left\{x \in (0;1)\colon \theta_{k_{s,n}}(x)=\varepsilon_{s,n}, \qquad s \in \{1,2,\dots,m_n\};\ n \in \{1,\dots,N\}\right\}\right). \qquad (18)$$

მაგრამ θ_n ფუნქციების დამოუკიდებლობის გამო (იხ. შედეგი 2), თუ გავითვალისწინებთ, რომ აგების თანახმად ყოველი $k_{s,n}$ რიცხვები განსხვავებულია, მივიღებთ, რომ (18) ტოლობაში მარჯვენა მხარე ტოლია:

$$\prod_{n=1}^{N}\prod_{s=1}^{m_n}1/2=\prod_{n=1}^{N}m(\omega_n).$$

მაშასადამე,

$$m(\{x \in (0;1)\colon f_n\,(x) \in \omega_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\})=\prod_{n=1}^{N}m(\omega_n). \qquad (19)$$

(19)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ ყოველი $n \in \{1,2,\dots,N\}$-სთვის E_n სიმრავლე არის თანაუკვეთი ორობითი ინტერვალების სასრული გაერთიანება:

$$E_n=\bigcup_{s=1}^{s_n}\omega_{s,n}, \qquad (20)$$

მაშინ

$$m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in E_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\}) = \prod_{n=1}^{N} m(E_n). \qquad (21)$$

აღსანიშნავია, რომ მოცემული ორობითი რაციონალური რიცხვისთვის $\frac{i}{2^k} \in [0;1]$ ორობითი წარმოდგენით:

$$\frac{i}{2^k} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s 2^{-s}, \ \ (\varepsilon_s = 0, s > k \text{ სთვის}),$$

ან

$$\frac{i}{2^k} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon'_s 2^{-s}, \ \ (\varepsilon'_s = 1, s > k \text{ სთვის}),$$

ტოლობა $f_n(x) = \frac{i}{2^k}$ სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ x ეკუთვნის სიმრავლეს:

$$\left\{x \in [0;1]: \theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon_s, s \in \{1,2,\dots\}\right\} \cup \left\{x \in [0;1]: \theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon'_s, s' \in \{1,2,\dots\}\right\}.$$

ანუ, ($\theta_n(x)$ ფუნქციათა დამოუკიდებლობის გამო) ნული ზომის სიმრავლეზე, ამიტომ

$$m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in \overline{E_n}, n \in \{1,2,\dots,N\}\}) = m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in E_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\}), \qquad (22)$$

სადაც $\bar{E}$ აღნიშნავს Eსიმრავლის ჩაკეტვას. საბოლოოდ, დავუშვათ, რომ I_n, $n \in \{1,2,\dots,N\}$, არის ინტერვალების ნებისმიერი სიმრავლე. რადგან $0 \le f_n(x) \le 1, x \in (0;1)$ გვექნება

$$m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\}) =$$

$$= m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in I_n \cap [0;1], n \in \{1,2,\dots,N\}\}). \qquad (23)$$

ნათელია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ შეიძლება მოიძებნოს $(20)-$ის სახის სიმრავლეები E_n და E_n', $n \in \{1,2,\dots,N\}$, , რომელთათვისაც სრულდება:

$$E_n \subset I_n \cap [0;1] \subset \overline{E'_n}, \qquad m(E'_n) - m(E_n) \le \varepsilon, \qquad n \in \{1,\dots,N\}. \qquad (24)$$

(21) და (22) შეფარდების გათვალისწინებით, (24)-დან ვიღებთ, რომ:

$$\prod_{n=1}^{N} m(\{I_n \cap [0;1]\}) - 2^N \varepsilon \le$$

$$\le m(\{x \in [0;1]: f_n(x) \in I_n \cap [0;1], n \in \{1,2,\dots,N\}\}) \le$$

$$\leq \prod_{n=1}^{N} m(\{I_n \cap [0;1]\}) + 2^N \varepsilon,$$

სადაც $\varepsilon -$ ს ნებისმიერობის გამო გვექნება ტოლობა:

$$m(\{x \in [0;1]: f_n(x) \in I_n, n \in \{1,2,\dots,N\}\}) = \prod_{n=1}^{N} m(I_n \cap [0;1]). \qquad (25)$$

ამით მტკიცდება (15) ტოლობა (როცა $N = 1$) და f_n ფუნქციათა დამოუკიდებლობა. ამით თეორემა 2 დამტკიცებულია.

ვინაიდან თეორემა 1-ში მოცემულია დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლის აგება, რომელთა მნიშვნელობების სიმრავლე თვლადია, მაშინ (16) ფუნქციებიდან გამომდინარე, შესაძლებელია ავაგოთ დ.ფ.მ. $\{\psi_n\}$, რომლის წევრებისთვის

$$m(\{x \in (0;1): \psi_n(x) > t\}) = 1 - \lambda_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}^1, \qquad n \in \{1,2,\dots\}, \qquad (26)$$

სადაც $\{\lambda_n(t)\}$ არის ნებისმიერი წინასწარ მოცემული განაწილების უწყვეტ ფუნქციათა თანმიმდევრობა. უფრო ზუსტად, სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3. დავუშვათ მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე უწყვეტი, მკაცრად მონოტონური ფუნქციების მიმდევრობა $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ამასთან, $\lim_{t\to-\infty} \lambda_n(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \lambda_n(t) = 1$, $n \in \{1,2,\dots\}$ და დავუშვათ, $\Lambda_n(t) = {\lambda_n}^{-1}(t)$ არის $\lambda_n -$ ის შექცეული ფუნქცია. მაშინ, მიმდევრობა $\psi_n(x) = \Lambda_n(f_n(x))$, $x \in (0;1)$, $n \in \{1,2,\dots\}$ არის დ.ფ.მ., რომელიც აკმაყოფილებს (26)-ს.

ლემა 1. დავუშვათ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$, - არის დ.ფ.მ. და $(a_n; b_n)$ არის სასრული ან უსასრულო ინტერვალი, რომელიც შეიცავს f_n ფუნქციის მნიშვნელობებს (ანუ $f_n(x) \in (a_n; b_n)$ თუ $x \in (0;1)$, ხოლო ფუნქცია $\Lambda_n(x)$ უწყვეტია და მკაცრად მონოტონურია $(a_n; b_n)$-ზე. მაშინ $\{\Lambda_n(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ არის დ.ფ.მ.

დამტკიცება. დავუშვათ, $\delta_n = (\Lambda_n(a_n); \Lambda_n(b_n))$ ყოველი $n \in \{1,2,\dots\}$ და დავუშვათ, რომ $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ - არის ინტერვალების ნებისმიერი სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, მაშინ

$$E = \{x \in (0;1): \Lambda_n(f_n(x)) \in I_n, n \in \{1,\dots,N\}\} =$$

$$= \{x \in (0;1): \Lambda_n(f_n(x)) \in I_n \cap \delta_n, n \in \{1,\dots,N\}\} =$$

$$= \{x \in (0;1): f_n(x) \in \Lambda_n^{-1}(I_n \cap \delta_n), n \in \{1, \dots, N\}\},$$

სადაც $\Lambda_n^{-1}(c;d)$ ისეთი $(c';d')$ ინტერვალია, რომ $\Lambda_n(c') = c,\ \Lambda_n(d') = d.$ ამიტომ დამოუკიდებლობის განსაზღვრებიდან გვაქვს

$$m(E) = \prod_{n=1}^{N} m(\{x \in (0;1): f_n(x) \in \Lambda_n^{-1}(I_n \cap \delta_n)\}) =$$

$$= \prod_{n=1}^{N} m\big(\{\in (0;1): \Lambda_n\big(f_n(x)\big) \in I_n \cap \delta_n\}\big) =$$

$$= \prod_{n=1}^{N} m\big(\{x \in (0;1): \Lambda_n\big(f_n(x)\big) \in I_n\}\big).$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 3-ის დასამტკიცებლად დაგვრჩა (26) ტოლობის შემოწმება. ვისარგებლებთ, რა თეორემა 2-ით (იხ.(15)), მივიღებთ

$$m\big(\{x \in (0;1): \Lambda_n\big(f_n(x)\big) > t\}\big) =$$

$$= m\left(\left\{x \in (0;1): \lambda_n\left(\Lambda_n\big(f_n(x)\big)\right) > \lambda_n(t)\right\}\right) =$$

$$= m(\{x \in (0;1): f_n(x) > \lambda_n(t)\}) = 1 - \lambda_n(x).$$

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

განსაკუთრებული ადგილი უკავია $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ დ.ფ.მ.-ს, რომელიც აგებულია თეორემა 3-ში იმ შემთხვევაში, როცა ყოველი $n \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვისთვის

$$\lambda_n(t) = \lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \qquad (27)$$

ანუ დამოუკიდებელ, ნორმალურად განაწილებულ ფუნქციათა თანმიმდევრობას.

ნათელია, რომ $\xi_n(x) \in L^p(0;1)$ ნებისმიერი $p < \infty$ და $n \in \{1,2,\dots\}$. გარდა ამისა, სამართლიანია ტოლობები:

$$\int_0^1 \xi_n(x)dx = 0, \qquad \int_0^1 \xi_n^{\,2}(x)dx = 1, \qquad n \in \{1,2,\dots\}. \qquad (28)$$

მართლაც, ცნობილი ტოლობის გამოყენებით გვექნება

$$\int_0^1 [\,\xi(x)]^p\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, d\widetilde{\lambda_\xi}\,(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, d\widetilde{\lambda'_\xi}(t)dt,$$

$$\xi \in L^p(0;1), \qquad p \in \{1{,}2\}; \quad \widetilde{\lambda_\xi}\,(t) = m(\{x \in (0;1): \xi(x) > t\}). \tag{29}$$

მაშინ ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \ \xi_n(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}dt = 0\,,$$

$$\int_0^1 \ {\xi_n}^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}dt =$$

$$= -te^{\frac{-t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 1.$$

§2. დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემების თვისებები

უპირველეს ყოვლისა მოვიყვანოთ განსაზღვრება 1-დან უშუალოდ გამომდინარე დამოუკიდებელ ფუნქციათა ერთობლიობების თვისება.

დავუშვათ, $\{f_n\}_{n=1}^N$, $x \in G$, $G \subset \mathbb{R}^1, 0 < m(G) < \infty$, არის დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლე და $n \in \{1,2,\dots,N\}$ ნატურალური რიცხვისთვის სიმრავლე F_n $(n \in \{1,2,\dots,N\})$ არის ინტერვალების, (ნახევარინტერვალების ან ჩაკეტილი მონაკვეთების) სასრული

გაერთიანება, მაშინ :

$$m(\{x \in G: f_n\,(x) \ \in F_n, n \in \{1,\dots N\}\}) =$$

$$= [m(G)]^{-N+1}\prod_{n=1}^{N} m(\{x \in G: f_n\,(x) \ \in F_n \ \}). \tag{30}$$

შესაბამისი ზღვარზე გადასვლის მეშვეობით ტოლობა (30) შესაძლებელია განვაზოგადოთ F_n სიმრავლეების უფრო ფართო კლასზეც, მაგრამ ამჟამად საკმარისია აღნიშნული კერძო შემთხვევაც.

თეორემა 4. $G \subset \mathbb{R}^1$, $m(G) > 0$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ დამოუკიდებელ ფუნქციათა ნებისმიერი $\{f_n\}_{n=1}^N$ სიმრავლისთვის, სადაც, $f_n \in L^1(G)$, $n \in \{1,2,\dots,N\}$ ფუნქცია $\prod_{n=1}^N f_n(x)$ აგრეთვე ეკუთვნის $L^1(G)$-ს და

$$\int_G \prod_{n=1}^N f_n(x)\,dx = (m(G))^{-N+1}\prod_{n=1}^N \int_G f_n(x)dx.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $N = 2$. ყოველი მთელი k და $\delta > 0$ რიცხვებისთვის

$$E_{k,\delta} = \{x \in G: f_1(x) \in [(k-1)\delta, k\delta]\}. \tag{31}$$

ჯერ დავუშვათ, რომ $f_1(x) \geq 0$ და $f_2(x) \geq 0$, მაშინ ლებეგის ინტეგრალის განსაზღვრებიდან გამომდინარე ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისთვის გვექნება :

$$\int_G f_1(x)f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_{k,\delta}} f_1(x)f_2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta\int_{E_{k,\delta}} f_2(x)dx + \rho,$$

სადაც $|\rho| \leq \delta \parallel f_2 \parallel_{L^1(G)}$. შედეგად,

$$\int_G f_1(x)f_2(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} k\delta\int_{E_{k,\delta}} f_2(x)dx. \tag{32}$$

მაშინ (29) ტოლობის ძალით ყოველი $k \in \{1,2,\dots\}$ მივიღებთ:

$$\int_{E_{k,\delta}} f_2(x)dx = \int_0^{\infty}\lambda_{k,\delta}(t)dt, \qquad \lambda_{k,\delta}(t) = m(\{x \in E_{k,\delta}: f_2(x) > t\}); \tag{33}$$

ამასთან, $f_1(x)$ და $f_2(x)$ ფუნქციათა დამოუკიდებლობის თანახმად $t > 0$ და $k \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვებისთვის გვექნება

$$\lambda_{k,\delta}(t) = \frac{m(E_{k,\delta})}{m(G)}\lambda_{f_2}(t),$$

$$\lambda_f(t) = m(\{x \in G: |f(x)| > t\}). \tag{34}$$

(33)-დან და (34)-დან, ვითვალისწინებთ რა, რომ $\int_0^{\infty}\lambda_{f_2}(t)dt = \int_G f_2(x)dx$, მივიღებთ, რომ

$$\int_{E_{k,\delta}} f_2(x)dx = \frac{m(E_{k,\delta})}{m(G)}\int_G f_2(x)dx, \qquad k \in \{1,2,\dots\}. \tag{35}$$

ბოლო ტოლობიდან და (32)-დან არაუარყოფითი f_1 და f_2 ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$\int_G f_1(x)f_2(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty} k\delta m(E_{k,\delta})\frac{1}{m(G)}\int_G f_2(x)dx =$$

$$= \frac{1}{m(G)} \int_G f_1(x)dx \int_G f_2(x)dx, \tag{36}$$

ამასთან $\int_G f_1(x)f_2(x)dx$ ნამრავლის სასრულობა გამომდინარეობს $\int_G f_1(x)dx$ და $\int_G f_2(x)dx$ ინტეგრალების სასრულობიდან.

ახლა, თუ მოცემულია დამოუკიდებელი ჯამებადი ცვლადი ნიშნის ფუნქციები $f_1(x)$ და $f_2(x)$, მაშინ ფუნქციები $|f_1(x)|$ და $|f_2(x)|$ აგრეთვე არიან დამოუკიდებელი. მართლაც, $f_n(x)$, $n \in \{1,2,..,N\}$ დამოუკიდებელ ფუნქციათა ნებისმიერი ერთობლიობისთვის სიმრავლეს $\{x: | f_n(x)| \in I_n, n \in \{1, \dots, N\}\}$ აქვს შემდეგი სახე :

$$\{x: f_n(x) \in I_n \cup (-I_n), n \in \{1, \dots, N\}\},$$

სადაც $-I_n = \{x: -x \in I_n\}$ და ისღა გვრჩება, რომ ვისარგებლოთ (30) ტოლობით. აქედან გამომდინარე (იხ. (36)), $\int_G |f_1(x)f_2(x)|dx$ ინტეგრალი არის სასრული.

შემდგომშიც ისევე ვმსჯელობთ, როგორც იმ შემთხვევაში, როცა $f_1(x) \geq 0$, $f_2(x) \geq 0$.

შემდეგი ტოლობიდან

$$\int_G f_1(x)f_2(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\,\delta \int_{E_{k,\delta}} f_2(x)dx$$

და (35) ტოლობიდან (რომელიც, აშკარაა, რომ სწორია იმ შემთხვევაშიც, როცა $k < 1$), ჩვენ მივიღებთ, რომ

$$\int_G f_1(x)f_2(x)dx = [m(G)]^{-1} \int_G f_1(x)dx \int_G f_2(x)dx$$

ანუ, როცა $N = 2$, თეორემა 4 დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემა 4, როცა $N > 2$. დავუშვათ, რომ თეორემა 4 სამართლიანია ნებისმიერი $N - 1$ ცალი ფუნქციისთვის.

როგორც ადრე, დავუშვათ, რომ მთელი k და $\delta > 0$ რიცხვებისთვის სიმრავლე $E_{k,\delta}$ განსაზღრულია (31)-ით და $m(E_{k,\delta}) > 0$. მაშინ ნათელია, რომ $\{f_n\}_{n=2}^{N}$ არის დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლე $E_{k,\delta}$ -ზე, ამასთან (იხ. (35)) გვაქვს:

$$\int_{E_{k,\delta}} \prod_{n=2}^{N} f_n(x)dx = \left[m(E_{k,\delta})\right]^{-N+2} \prod_{n=2}^{N} \int_{E_{k,\delta}} f_n(x)dx =$$

$$= \frac{m(E_{k,\delta})}{[m(G)]^{N-1}} \prod_{n=2}^{N} \int_G f_n(x)dx, \qquad k \in \{0, \pm 1, \dots\}. \tag{37}$$

ანალოგიურად,

$$\int_{\tilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=2}^{N} |f_n(x)| dx = \frac{m(\tilde{E}_{k,\delta})}{[m(G)]^{N-1}} \prod_{n=2}^{N} \int_G |f_n(x)|\, dx, \quad k \in \{0, \pm 1, \dots\}, \tag{37'}$$

სადაც $\tilde{E}_{k,\delta} = \{x \in G: |f_1(x)| \in [(k-1)\delta, k\delta)\}, k \in \{1,2, \dots\}$, $\delta > 0$. თუ (37′)-ში ავიღებთ $\delta = 1$, მივიღებთ, რომ

$$\int_G \prod_{n=1}^{N} |f_n(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=1}^{N} |f_n(x)| dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\tilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=2}^{N} |f_n(x)| dx =$$

$$= [m(G)]^{1-N} \prod_{n=2}^{N} \int_G |f_n(x)| dx \sum_{k=1}^{\infty} k m(\tilde{E}_{k,1}) < \infty.$$

ესე იგი, $\prod_{n=1}^{N} |f_n(x)|$-კრებადია. გამოდის, რომ ადგილი აქვს ტოლობას (იხ. (32))

$$\int_G \prod_{n=1}^{N} f_n(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta \int_{\tilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=2}^{N} f_n\,(x) dx,$$

საიდანაც, (37)-ის ძალით გამომდინარეობს, რომ

$$\int_G \prod_{n=1}^{N} f_n(x)\, dx = [m(G)]^{1-N} \prod_{n=2}^{N} \int_G f_n(x) dx \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta m(E_{k,\delta}) =$$

$$= [m(G)]^{1-N} \prod_{n=1}^{N} \int_G f_n(x) dx\,.$$

თეორემა 4 დამტკიცებულია.

შედეგი 3. დ.ფ.მ. $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0;1)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = 0, \qquad \int_0^1 \psi_n{}^2(x)dx = 1, \quad n \in \{1,2, \dots\}.$$

არის ორთონორმირებული სისტემა (ო.ნ.ს.).

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით პოლინომებისა და მწკრივების თვისებებს $\{\psi_n\}$ დამოუკიდებელ ფუნქციათა ო.ნ.ს. - ის მიმართ.

ამასთან, რიგ შემთხვევებში ჩვენ დამატებით მოვითხოვთ, რომ ψ_n ფუნქციები იყვნენ ერთობლივ შემოსაზღვრული: $|\psi_n(x)| \leq M, x \in (0;1), n \in \{1,2,\ldots\}$ (ცხადია, რომ $M \geq 1$, ვინაიდან $M \geq \|\psi_n\|_\infty \geq \|\psi_n\|_2 = 1$).

თეორემა 5. დამოუკიდებელ ფუნქციათა ნებისმიერი სიმრავლისთვის $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს :

$$\|\psi_n\|_2 = 1, \qquad \|\psi_n\|_\infty \geq M, \qquad \int_0^1 \psi_n(x)dx = 0, \quad n \in \{1,2,\ldots,N\},$$

ყოველი $t \geq 0$ რიცხვისთვის სამართლიანია უტოლობა:

$$\lambda(t) = m\left\{x \in (0;1): \left|\sum_{n=1}^N a_n\psi_n(x)\right| > t\left(\sum_{n=1}^N {a_n}^2\right)^{1/2}\right\} \leq 2e^{-\frac{t^2}{4M^2}}. \tag{38}$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი t რიცხვისთვის

$$1 + \sum_{r=2}^\infty \frac{t^r}{r!} \leq e^{t^2}. \tag{39}$$

ვინაიდან $[\,(2j+1)!]^2 > \frac{1}{2}\,(2j)!\;(2j+2)!, j \geq 1$, $|ab| < 1/2\,(a^2 + b^2)$, მივიღებთ

$$\frac{|t^{2j+1}|}{(2j+1)!} \leq \frac{\sqrt{2}|t^j t^{j+1}|}{[(2j)!\,(2j+2)!]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t^{2j}}{(2j)!} + \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}\right),$$

საიდანაც გამოდის, რომ

$$1 + \sum_{r=2}^\infty \frac{t^r}{r!} = 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t^2}{2} + \sqrt{2}\sum_{j=2}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t^2 + (1+\sqrt{2})\sum_{j=2}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{j!} = e^{t^2}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $z > 0$ და $n \in \{1,2,\dots,N\}$

$$\int_0^1 \exp\{za_n\psi_n(x)\}\,dx \le \exp\{z^2 a_n^2\, M^2\}. \tag{40}$$

დავშალოთ ფუნქცია $\exp\{za_n\psi_n(x)\}$ ტეილორის მწკრივად და $\int_0^1 \psi_n(x)dx = 0$ ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^1 \int_0^1 \exp\{za_n\psi_n(x)\}\,dx = \int_0^1 \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(za_n\psi_n(x))^r}{r!}\right] dx =$$

$$= 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \int_0^1 \frac{(za_n\psi_n(x))^r}{r!}\,dx \le$$

$$\le \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|za_nM|^r}{r!} \le$$

$$\le \exp\{z^2 a_n^2 M^2\}.$$

დავუშვათ $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)$ და

$$\lambda'(t) = m\left(\left\{x \in (0;1): P(x) > t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right), \qquad t \ge 0.$$

e^x ფუნქციის მონოტონურობით და ჩებიშევის უტოლობით მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $z > 0$ რიცხვისთვის სრულდება

$$\lambda'(t) = m\left(\left\{x \in (0;1): \exp[zP(x)] > exp\left[zt\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\right\}\right) \le$$

$$\le exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right] \int_0^1 exp[zP(x)]dx =$$

$$= exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right] \int_0^1 \prod_{n=1}^{N} exp[za_n\psi_n(x)]\,dx. \tag{41}$$

თეორემა 4-ის ძალით (იხ. აგრეთვე ლემა 1 თეორემა 3-ში) (41)-ის მარჯვენა ნაწილი ტოლია

$$exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\prod_{n=1}^{N}\int_0^1 exp[za_n\psi_n(x)]dx,$$

საიდანაც, (40) შეფასების გამოყენებით, ვპოულობთ, რომ ნებისმიერი z > 0-სთვის

$$\lambda'(t) \le exp\left\{tz(\textstyle\sum_{n=1}^{N} a_n^2)^{\frac{1}{2}} + z^2M^2\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right\}. \qquad (42)$$

თუ (42)-ში ავიღებთ $z = t\left[2M^2(\sum_{n=1}^{N} a_n^2)^{1/2}\right]^{-1}$, მივიღებთ, რომ

$$\lambda'(t) \le exp\left[-\frac{t^2}{2M^2}+\frac{t^2M^2}{4M^2}\right] = exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right]. \qquad (43)$$

შემდგომ $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ სიმრავლის ნაცვლად განვიხილოთ $\{-\psi_n\}_{n=1}^{N}$ სიმრავლე და თუ მასთან გამოვიყენებთ (43) შეფასებას, გვექნება

$$\lambda''(t) = m\left(\left\{x \in (0;1): P(x) < -t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right\}\right) \le exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right],$$

და შესაბამისად,

$$\lambda(t) = \lambda'(t) + \lambda''(t) \le 2exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right].$$

თეორემა 5 დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ მუდმივთა უფრო ზუსტი შეფასება თეორემა 5-ში საშუალებას იძლევა მივიღოთ უტოლობა $\lambda(t) \le 2exp\left[-\frac{t^2}{2M^2}\right]$, მაგრამ ჩვენი მიზნებისთვის სავსებით საკმარისია $\lambda(t) \le Cexp[-\gamma t^2]$ სახის ნებისმიერი შეფასება, სადაც $\gamma = \gamma(M) > 0$.

თეორემა 5-დან გამომდინარეობს რიგი შედეგები, რომლებიც ეხება პოლინომებს და მწკრივებს დ.ფ.მ. $x \in (0;1)$ მიმართ $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, რომლის ფუნქციებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\|\psi_n\|_2 = 1, \qquad \|\psi_n\|_\infty \le M, \qquad \int_0^1 \psi_n(x)dx = 0, \qquad n \in \{1,2,\dots\}. \qquad (44)$$

თეორემა 6 (ხინჩინის უტოლობა). ნებისმიერი $p > 2$ და $M \ge 1$ რიცხვებისთვის არსებობს ისეთი მუდმივა $C_{p,M}$, რომ ნებისმიერი პოლინომისთვის $P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\psi_n(x)$ $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ დ.ფ.მ.$-$ის მიმართ, რომელიც აკმაყოფილებს (44) პირობებს, სამართლიანია უტოლობა

$$\|P\|_p \leq C_{p,M}\|P\|_2 = C_{p,M}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\|P\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} = 1.$$

დაუშვათ $\lambda(t) = m(\{x \in (0;1): |P(x)| > t\})$. თეორემა 5-ის მიხედვით

$$\lambda(t) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{4M^2}\right).$$

ამიტომ გვექნება

$$\|P\|_p = \left\{p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,dt\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{2p\int_0^\infty t^{p-1}exp\left(-\frac{t^2}{4M^2}\right)dt\right\}^{\frac{1}{p}} = C_{p,m}.$$

თეორემა 7. ნებისმიერი პოლინომისთვის დ.ფ.მ.-ს მიმართ, რომელიც აკმაყოფილებს (44)-ის პირობებს, სრულდება უტოლობები

$$\text{ა) } m\left(\left\{x \in (0;1): |P(x)| > \frac{1}{2}\|P\|_2\right\}\right) \geq C_M > 0;$$

$$\text{ბ) } ||P||_p > ||P||_1 > C_M'||P||_2 \qquad (C_M' > 0, \qquad 1 \leq p \leq \infty).$$

ლემა 1. ნებისმიერი $f(x) \geq 0$ ფუნქციისთვის $x \in (0;1)$, $\|f\|_1 = 1, \|f\|_2 = K$, სამართლიანია შეფასება:

$$m\left(\left\{x \in (0;1): f(x) \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \geq \frac{1}{8K^2},$$

$$m(\{x \in (0;1): f(x) \neq 0\}) \geq \frac{1}{K^2}.$$

დამტკიცება. დავუშვათ,

$$Q = \left\{x \in (0;1): f(x) \geq \frac{1}{4}\right\}, \qquad E = \{x \in (0;1): f(x) \geq 2K^2\}.$$

მაშინ

$$K^2 \geq \int_E f^2(x)dx \geq 2K^2 \int_E f(x)dx,$$

ანუ

$$\int_E f(x)dx \leq \frac{1}{2}, \int_{(0;1)\setminus E} f(x)dx \geq \frac{1}{2}$$

ამიტომ

$$\frac{1}{2} \leq \int_{(0;1)\setminus E} f(x)dx = \int_{[(0;1)\setminus E]\cap Q} f(x)dx + \int_{[(0;1)\setminus E]\cap[(0;1)\setminus Q]} f(x)dx \leq$$

$$\leq 2K^2 m(Q) + \frac{1}{4},$$

საიდანაც გვაქვს $m\,(Q) \geq (8K^2)^{-1}$.

შემდგომ, თუ $G = \{\, x \in (0;1) : f\,(x) \neq 0\}$, მაშინ ჰელდერის უტოლობით

$$1 = ||\, f\,||_1 = \int_G f\,(x)\ dx \leq \left(\int_G 1\,dx\right)^{1/2} \left(\int_G f^2(x)\ dx\right)^{1/2} = (m(G))^{1/2}\, K,$$

ანუ $mG \geq (1/K)^2$. ლემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 7-ის დამტკიცება. საკმარისია დავამტკიცოთ ა) ნაწილი, რადგან ბ) არის მისი უშუალო შედეგი. თეორემა 6-ის ძალით $||P||_4 \leq C_{4,M}||P||_2$, და ლემა 1-ის გამოყენებით $P^2(x)\,||\,P\,||_2^{-2}$ ფუნქციისთვის ($||P\,||_2 \neq 0$), მივიღებთ, რომ

$$m\left(\{x \in (0;1) : P^2\,(x)||P\,||_2{}^{-2} \geq \tfrac{1}{4}\}\right) \geq \left(8\, C_{4,M}^4\right)^{-1},$$

საიდანაც გამომდინარეობს *ა*) $C_M = (8\, C_{4,M}^4)^{-1}$. თეორემა 7 დამტკიცებულია.

თეორემა 7-ის მეშვეობით ძნელი არ არის მივიღოთ მწკრივის ზომის კრებადობის აუცილებელი პირობა

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x), \tag{45}$$

სადაც $\{\psi_n\}$ დ.ფ.მ. აკმაყოფილებს (44) პირობებს. ასეთ პირობად გვევლინება (45) მწკრივის კოეფიციენტების კვადრატთა ჯამის სასრულობა:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{46}$$

(46) უტოლობა არის აგრეთვე საკმარისი პირობა მწკრივის ზომით კრებადობისთვის და თითქმის ყველგან კრებადობისთვის ნებისმიერ დამოუკიდებელ ფუნქციათა ო.ნ.ს.-სთვის. ზომით კრებადობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ (46) პირობით მწკრივი (45), როგორც ყოველი ორთოგონალური მწკრივი კრებადია $L^2(0;1)-$ში და ზომითაც.

(46) შეფასების საკმარისობას თითქმის ყველგან კრებადობისთვის დავამტკიცებთ მოგვიანებით (იხ. თეორემა 9).

თეორემა 8. თუ დ.ფ.მ. $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ აკმაყოფილებს (44) პირობებს და (45) მწკრივი კრებადია ზომით (მით უმეტეს თითქმის ყველგან) (0;1)-ზე, მაშინ სრულდება პირობა (46). გარდა ამისა

$$m\left(\left\{x\in(0;1):\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(x)\right|>\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)^{1/2}\right\}\right)\geq c_M>0. \qquad (47)$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\infty$, ჩვენ შევძლებთ ვიპოვოთ $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ ნატურალური რიცხვების ისეთი ზრდადი მიმდევრობა, რომ

$$\sum_{n=N_{k+1}}^{N_{k+1}}a_n^2\ >k^2 \qquad k\in\{\,1,2,\dots\}\,.$$

მაშინ თეორემა 7-ის ა) პუნქტის თანახმად

$$m\left(\left\{x\in(0;1):\left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}a_n\psi_n(x)\right|>\frac{k}{2}\right\}\right)\geq c_M>0; \qquad k\in\{\,1,2,\dots\},$$

რაც ეწინააღმდეგება (45) მწკრივის ზომით კრებადობას. შეფასება (47) აგრეთვე გამომდინარეობს თეორემა 7-ის ა) პუნქტიდან და იმ ფაქტიდან, რომ (45) მწკრივი ზომის კრებადობის გამო ნებისმიერი $\alpha\ >0$ რიცხვისთვის

$$m\left(\left\{x\in(0;1):\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(x)\right|>\alpha\right\}\right)\geq$$

$$\geq\overline{\lim_{N\to\infty}}\,m\left(\left\{x\in(0;1):\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(x)\right|>2\alpha\right\}\right).$$

თეორემა 9. ნებისმიერ დამოუკიდებელ ფუნქციათა $\Psi=\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი ო.ნ.ს., წარმოადგენს კრებადობის სისტემას. უფრო მეტიც, კერძო ჯამთა $S_\psi^*(\{a_n\})$ მაჟორანტის ოპერატორი არის შემოსაზღვრული ოპერატორი l^2- დან $L^2(\,0;1)$ -ში:

$$\|S_\Psi^*(\{a_n\})\|_2 \le 4\|\{a_n\}\|_{l^2}. \tag{48}$$

შენიშვნა. თეორემა 9-სგან განსხვავებით, თეორემების 5–8 -ის სამართლიანობისთვის აუცილებელია ორთონორმირების გარდა ψ_n დამოუკიდებელ ფუნქციებს უნდა დავადოთ დამატებითი შეზღუდვები, მაგალითად: $\|\psi_n(x)\|_\infty \le M, \quad n \in \{1,2,\dots\}$ შეფასებების შესრულება. ამასთან, ψ_n ფუნქციების ერთობლივ შემოსაზღვრულობის შეზღუდვის მოთხოვნა შესაძლებელია ყველა ამ თეორემაში შესუსტდეს. მაგალითად, თეორემა 8-ში იგი შეიძლება შეიცვალოს პირობით $||\psi_n||_1 \ge c > 0, \ n \in \{1,2,\dots\}$, რომელიც იოლი საჩვენებლია, რომ აუცილებელი პირობაა თეორემა 8-ის სამართლიანობისთვის.

ლემა 1. ნებისმიერი დ.ფ.ს.-სთვის $\Psi' = \{\psi'_n\}_{n=1}^\infty$ რომლებიც სასრულ რაოდენობა მნიშვნელობებს იღებენ, და ნებისმიერი $\{a_n\}_{n=1}^N$ რიცხვებისთვის გვაქვს

$$\left\|S_{\Psi'}^*(\{a_n\})\right\|_2 \le 4 \max_{1\le s\le m\le N} \left\|\sum_{n=s}^m a_n\psi'_n\right\|_2 \equiv 4M. \tag{49}$$

დამტკიცება. ვაფიქსირებთ რიცხვებს $\{a_n\}_{n=1}^\infty$; ამასთან ზოგადობის შეუზღუდავად ვგულისხმობთ, რომ $M = 1$. დავუშვათ

$$S^*(x) = S_{\Psi'}^*(\{a_n\},x), \qquad S_r(x) = \sum_{n=1}^r a_n\psi'_n(x), \qquad r \in \{1,2,\dots,N\}.$$

შევაფასოთ განაწილების ფუნქცია $\lambda(t) = m(\{x \in (0;1): S^*(x) > t\})$. წინასწარ აღვნიშნავთ, რომ ჩებიშევის უტოლობის ძალით $1 \le s \le m \le N$ რიცხვებისთვის

$$m\left(\left\{x \in (0;1): \sum_{n=s}^m a_n\psi'_n(x) < -\frac{3}{2}\right\}\right) \le \frac{4}{9}M^2 < \frac{1}{2}. \tag{50}$$

დავუშვათ $t > 0$,

$$G_t^+ = \left\{x \in (0;1): \max_{1\le r\le N} S_r(x) > t\right\},$$

$$G_t^- = \left\{x \in (0;1): \max_{1\le r\le N} S_r(x) < -t\right\}.$$

ნათელია, რომ

$$\lambda(t) \le m(G_t^+) + m(G_t^-). \tag{51}$$

G_t^+ სიმრავლე წარმოვადგინოთ სახით

$$G_t^+ = \bigcup_{q=1}^{N} G_t^+(q), \tag{52}$$

$$G_t^+(q) = \{x \in (0;1): S_r(x) \le t, 1 \le r \le q, S_q(x) > t\ \}.$$

როგორც განსაზღვრებებიდან ჩანს (იხ. (52)), $G_t^+(q)$ სიმრავლეები განსხვავებული q-სთვის იქნებიან თანაუკვეთნი და ყოველი $G_t^+(q)$ არის სასრული გაერთიანება შემდეგი სახის სიმრავლეების $\{\ x\ \in (0;1) : {\psi_n}'(x)\ =\ z_n,\ 1 \le n \le\ q\}$.

თუ ψ'_n ფუნქციების დამოუკიდებლობას გამოვიყენებთ, ჩვენ ნებისმიერი z-სა და $q\ \in \{1,2,\dots,N-1\}$ რიცხვისთვის მივიღებთ, რომ

$$m\left(\left\{x \in G_t^+(q): \sum_{n=q+1}^{N} a_n {\psi'}_n(x) > z\right\}\right) =$$

$$= m[G_t^+(q)] \times m\left(\left\{x \in (0;1): \sum_{n=q+1}^{N} a_n {\psi'}_n(x) > z\right\}\right),$$

შესაბამისად (იხ. (50), (52)),

$$m\left(\left\{x \in G_t^+(q): S_N(x) > t - \frac{3}{2}\right\}\right) \ge$$

$$\ge m\left(\left\{x \in G_t^+(q): \sum_{n=q+1}^{N} a_n {\psi'}_n(x) \ge -\frac{3}{2}\right\}\right) =$$

$$= m([G_t^+(q)]) \times m\left(\left\{x \in (0;1): \sum_{n=q+1}^{N} a_n {\psi'}_n(x) \ge -\frac{3}{2}\right\}\right) > \frac{1}{2} m([G_t^+(q)]). \tag{53}$$

თუ შევაჯამებთ (53) შეფასებებს სხვადასხვა $q\ \in \{\ 1,2,\dots,N-1\}$ რიცხვისთვის მივიღებთ

$$m\left(\left\{\ x\ \in\ G_t^+ : S_N(x) >\ t - \frac{3}{2}\right\}\right) > \frac{1}{2}\ m(\ G_t^+). \tag{54}$$

განვიხილავთ რა $\{\psi'_n\}$ სიმრავლის ნაცვლად $\{-\psi'_n\}$ -სიმრავლეს (54)-დან მივიღებთ, რომ:

$$m\left(\left\{\ x\ \in\ G_t^- : S_N(x) < -\,t + \frac{3}{2}\right\}\right) > \frac{1}{2}\ m(\ G_t^-). \tag{55}$$

შევაჯამოთ (54) და (55) უტოლობები და გავითვალისწინოთ (51)-ს, მივიღებთ

$$\lambda(t) \le 2\,\lambda'\left(t - \tfrac{3}{2}\right), \qquad \lambda'(t) = m(\{x \in (0;1): |S_N(x)| > t\}). \tag{56}$$

(56)-დან მივიღებთ, რომ

$$\|S^*\|_2^2 = 2\int_0^\infty t\lambda(t)dt \leq$$

$$\leq 2\left[\int_0^{\frac{3}{2}} tdt + \int_{\frac{3}{2}}^\infty t\lambda(t)dt\right] \leq \frac{9}{4} + 4\int_{3/2}^\infty t\lambda'\left(t-\frac{3}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{9}{4} + 4\int_0^\infty t\lambda'(t)dt + 6\int_0^\infty \lambda'(t)dt =$$

$$= \frac{9}{4} + 2\|S_N\|_2^2 + 6\|S_N\|_1 < 11M = 11.$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

აღნიშვნების შენარჩუნებით, რომლებიც გამოვიყენეთ ფორმულირებაში და ლემა 1-ის დამტკიცებაში, მოვიყვანოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\|S^*\|_P \leq C_P\big(M + \|S_N\|_p\big), \quad 1 \leq p < \infty. \tag{57}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად თუ ვიგულისხმებთ, რომ $M = 1$, (56)-დან მივიღებთ

$$\|S^*\|_p^p \leq 2p\int_0^\infty t^p\lambda'\left(t-\frac{3}{2}\right)dt \leq$$

$$\leq C_p\left[\int_0^\infty \lambda'(t)dt + \int_0^\infty t^p\lambda'(t)dt\right] \leq C_p\big(\|S_N\|_1 + \|S_N\|_p^p\big) \leq$$

$$\leq C_p\big(1 + \|S_N\|_p^p\big) \leq C_p\big(M + \|S_N\|_p\big)^p.$$

თეორემა 9-ის დამტკიცება. კარგად ცნობილი თეორემის თანახმად საკმარისია ნებისმიერი სასრული $\{a_n\}_{n=1}^N$ სიმრავლისთვის, მაგალითად $\sum_{n=1}^N a_n^2 = 1$. დავადგინოთ (48) შეფასების სამართლიანობა. $\psi_n,\ n \in \{1,\dots,N\}$ ფუნქციებს დავუახლოვდეთ დამოუკიდებელი ψ'_n ფუნქციებით, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობათა სასრულ რაოდენობას. ამისათვის, როცა $-\infty < k < \infty$ და $0 < \delta < \infty$ შემოვიღოთ სიმრავლე

$$E_n(k,\delta) = \{x \in (0;1) \colon \psi_n(x) \in [(k-1)\delta, k\delta)\},$$

ამასთან, როცა $n \in \{1,2,\dots,N\}, p \in \{1,2,\dots\}$

$$\psi_n(x,p,\delta) = \begin{cases} k\delta, \text{თუ } x \in E_n(k,\delta), -p < k \leq p, \\ -\delta p, \ \text{თუ } \psi_n(x) < -\delta p, \\ \delta p, \ \text{თუ } \psi_n(x) > \delta p. \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი p და δ რიცხვებისთვის $\Psi_{p,\delta} = \{\psi_n(x,p,\delta)\}_{n=1}^N$ არის დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლე და რომ $\|\psi_n(x,p,\delta) - \psi_n(x)\|_2 \to 0$, როცა $p \to \infty$, $\delta \to 0$. ამიტომ,

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ \delta\to 0}} \max_{1\le s\le m\le N} \left\| \sum_{n=s}^{m} a_n \psi_n(x,p,\delta) \right\|_2 = 1,$$

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ \delta\to 0}} \left\| S^*_{\Psi_{p,\delta}}(\{a_n\}) \right\|_2 = \|S^*_{\Psi}(\{a_n\})\|_2. \tag{58}$$

(58) გამოსახულებიდან და ლემა 1-დან უშუალოდ გამომდინარეობს (48) უტოლობა $\{a_n\}_{n=1}^N$ სიმრავლისთვის. თეორემა 9 დამტკიცებულია.

ფუნქციათა თეორიაში, კერძოდ, ორთოგონალური სისტემების აგებისას განსაკუთრებული თვისებებით ხშირად გამოიყენება შემდეგი ლემა დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მიმდევრობის შესახებ.

ბორელ-კანტელის ლემა. თუ $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, $E_n \subset (0;1)$ არის დამოუკიდებელ სიმრავლეთა ისეთი თანმიმდევრობა, რომ

$\sum_{n=1}^\infty m(E_n) = \infty$ და $E_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \equiv \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n$, მაშინ $m\,(E_0) = 1$.

დამტკიცება. საკმარისია შემოწმდეს, რომ $m(\bigcup_{n=k}^\infty E_n) = 1$ თუ $k \in \{1,2,\dots\}$. მაგრამ ნებისმიერი $q > k$ რიცხვისთვის გვექნება

$$1 - m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \le 1 - m\left(\bigcup_{n=k}^{q} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=k}^{q} [(0;1)\backslash E_n]\right).$$

ვინაიდან $\{(0;1)\backslash E_n\}_{n=k}^\infty$ არის დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მიმდევრობა (იხ. განსაზღვრება 2), მაშინ თეორემა 4 -ის ძალით

$$m\left(\bigcap_{n=k}^{q} [(0;1)\backslash E_n]\right) = \int_0^1 \prod_{n=k}^{q} \chi_{(0;1)\backslash E_n}(x)dx = \prod_{n=k}^{q} \big(1 - m(E_n)\big).$$

$\sum_{n=k}^\infty m(E_n)$ მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარე გვაქვს, რომ

$$\lim_{q\to\infty} \prod_{n=k}^{q} \big(1 - m(E_n)\big) = 0,$$

და ამიტომ

$$1 - m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \le \lim_{q\to\infty} m\left(\bigcap_{n=k}^{q} [(0;1)\backslash E_n]\right) = 0.$$

ლემა დამტკიცებულია.

რიგ შემთხვევაში ორთოგონალური მწკრივების თვისებების კვლევისას გვესაჭიროება ბორელ-კანტელის ლემის შემდეგი გაძლიერებული ვერსია

დებულება 1. დავუშვათ $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subset (0;1)$ არის ზომადი სიმრავლეების ისეთი მიმდევრობა, რომ

1) ნატურალური რიცხვების ნებისმიერი წყვილისთვის (n,j), როცა $n \neq j$

$$m(E_n \cap E_j) = m(E_n)m(E_j);$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \infty.$

მაშინ

$$m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n\right) = 1.$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური N-ისთვის და ნებისმიერი $\delta > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი M, რომ

$$m\left(\bigcup_{n=N}^{M} E_n\right) \geq 1-\delta.$$

ბოლო უტოლობაში მარცხენა მხარე ტოლია

$$m(\{x \in (0;1): f_{N,M}(x) \neq 0\}), \quad f_{N,M}(x) = \sum_{n=N}^{M} \chi_{E_n}(x),$$

სადაც, χ_{E_n} E სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქციაა. ამასთან

$$\|f_{N,M}\|_1 = \sum_{n=N}^{M} m(E_n)$$

და 1) პირობის ძალით

$$\|f_{N,M}\|_2^2 = \sum_{n=N}^{M} m(E_n) + 2\sum_{\substack{n,n'=N\\ n\neq n'}}^{M} m(E_n)m(E_{n'}) =$$

$$= \left[\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right]^2 + \sum_{n=N}^{M} m(E_n) - \sum_{n=N}^{M} [m(E_n)]^2.$$

ანუ

$$\|f_{N,M}\|_2 \le \left[\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right]\left(1+\left(\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(ზოგადობის შეუზღუდავად ვუშვებთ, რომ $m(E_n) > 0, n \in \{1,2,\dots\}$). თუ ამ უტოლობას გამოვიყენებთ

$$f_{N,M}(x)\left(A_{N,M}\right)^{-1}, \qquad A_{N,M} \equiv \sum_{n=N}^{M} m(E_n),$$

ფუნქციებისთვის და შეფასება 2) მე-7-ე თეორემის ლემა 1-დან და მწკრივის $\sum_{n=N}^{\infty} m(E_n)$ განშლადობის გათვალისწინებით (იხ. 2)), მივიღებთ, რომ ნებისმიერი N და $\delta > 0$, M-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისთვის გვაქვს:

$$m\left(\{x \in (0;1): f_{N,M}(x) \neq 0\}\right) \ge \left(1+\frac{1}{A_{N,M}}\right)^{-1} \ge 1-\delta.$$

დებულება 1 დამტკიცებულია.

თუ წინა თეორემები უფრო ზოგადი ხასიათის მატარებლები იყვნენ, შემდეგი თეორემები შეეხება ორთოგონალური მწკრივების თეორიისთვის მნიშვნელოვან თვისებას, რომელიც გააჩნიათ დამოუკიდებელ, ნორმალურად განაწილებულ ფუნქციათა სიმრავლეს (იხ. პარაგრ.1, თეორემა 3 და (27)).

თეორემა 10. თუ $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{N}$ არის დამოუკიდებელ, ნორმალურად განაწილებულ ფუნქციათა სიმრავლე, ამასთან

$$\int_0^1 \xi_n(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \xi_n^2(x)dx = 1, \qquad n \in \{1,2,\dots,N\},$$

ხოლო $A = \{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{N}$ არის ორთონორმირებული მატრიცა, მაშინ

$$\xi'_m(x) = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\xi_n(x), \ \ m \in \{1,2,\dots,N\},$$

ფუნქციები ქმნიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლეს და

$$\int_0^1 \xi'_m(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \left[\xi'_m(x)\right]^2 dx = 1, \quad m \in \{1,2,\dots,N\}.$$

დამტკიცება. თუ $m \in \{1,2,\ldots, N\}$

$$\int_0^1 \xi'_m(x)dx = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \int_0^1 \xi_n(x)dx = 0,$$

გარდა ამისა, ვინაიდან $\{\xi_n(x)\}$ არის ო.ნ.ს., ხოლო მატრიცა A - ორთონორმირებულია, მაშინ ნათელია, რომ ფუნქციები $\xi'_m(x)$, $m \in \{1,2,\ldots, N\}$ ქმნიან ორთონორმირებულ ერთობლიობას, ამიტომ $\int_0^1 [\xi'_m(x)]^2\, dx = 1, m \in \{1,2,\ldots,N\}$.

დავამტკიცოთ, რომ I_m ინტერვალების ნებისმიერი სიმრავლისათვის ღერძზე, $m \in \{1,2,\ldots, N\}$,

$$m\big(\{x \in (0;1): \xi'_m(x) \in I_m, \quad m \in \{1,2,\ldots,N\}\}\big) = \prod_{m=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_m} e^{-y^2/2}\, dy. \qquad (59)$$

შემოვიღოთ $\overline{\xi(x)}$ და $\overline{\xi'(x)}$ ვექტორები

$$\overline{\xi(x)} = \{\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_N(x)\}, \qquad \overline{\xi'(x)} = \{\xi_1{}'(x), \xi_2{}'(x), \ldots, \xi_N{}'(x)\},$$

და π_0- პარალელეპიპედი

$$\pi_0 = \{y = \{y_m\}_{m=1}^{N}: y_m \in I_m \ \ m \in \{1,2,\ldots,N\}\} \subset \mathbb{R}^N$$

(ჩვენ ვთვლით, რომ $\mathbb{R}^N$-ში დაფიქსირებულია გარკვეული სტანდარტული ბაზისი $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ და ვექტორთა ყველა კოორდინატი მოცემულია ამ ბაზისის მიხედვით).

დავუშვათ, შემდგომში $A^{-1}(\pi_0)$ არის π_0 პარალელეპიპედის წინარე სახე $\mathbb{R}^N$-ში A მატრიცით ბრუნვისას, ანუ A არის ბრუნვა, რომლის დროს $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ ვექტორი გადადის $\{y'_m\}_{m=1}^{N}$, $y'_m = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\, y_n$ ვექტორში. მაშინ

$$m\left(\left\{x \in (0;1): \xi'_m(x) \in I_m, m \in \{1,2,\ldots,N\}\right\}\right) =$$
$$= m\big(\{x \in (0;1): \overline{\xi(x)} \ \in A^{-1}(\pi_0)\}\big). \qquad (60)$$

ნებისმიერი π პარალელეპიპედისათვის, რომლის წიბოები კოორდინატთა ღერძების პარალელურია, პირობის მიხედვით გვექნება :

$$m\big(\{x \in (0;1): \overline{\xi(x)} \ \in \pi\}\big) = (2\pi)^{N/2} \int_{\pi} \ exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} y_n^2\right\} dy_1 \ldots dy_N,$$

და ნებისმიერი $P \subset \mathbb{R}^N$ სიმრავლისათვის , რომელსაც შემდეგი სახე აქვს

$$P = \bigcup_{s=1}^{s'} \overline{\pi_s}, \quad \pi_s \cap \pi_q = \emptyset, \text{როცა} \ \ s \neq q, \qquad (61)$$

(სადაც π_s- ღია პარალელეპიპედია, კოორდინატთა ღერძების პარალელური წიბოებით, ხოლო $\overline{\pi_s}$ - მისი ჩაკეტვა), სამართლიანია ტოლობა

$$m(\{x \in (0;1): \overline{\xi(x)} \in P\}) =$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_P exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} y_n^2\right\} dy_1 \dots dy_N. \qquad (62)$$

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ორი (61) სახის ისეთი სიმრავლე P' და P'' , რომ

ა)$P' \subset A^{-1}(\pi_0) \subset P''$; ბ) $m_N(P'') - m_N(P') \leq \varepsilon$,

სადაც m_N- ლებეგის ზომაა $\mathbb{R}^N$-ში. ε-ს მისწრაფებით 0-სკენ და (60) და (62) უტოლობების გამოყენებით, მივიღებთ

$$m\left(\left\{x \in (0;1): \xi'_m(x) \in I_m, \quad m \in \{1,2,\dots,N\}\right\}\right) =$$

$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{A^{-1}(\pi_0)} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} y_n^2\right\} dy_1 \dots dy_N. \qquad (63)$$

(63) ინტეგრალში ცვლადის შეცვლით

$$y'_m = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} y_n , m \in \{1,\dots,N\}$$

$exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} y_n^2\right\}$ ფუნქციების $\mathbb{R}^N$ სივრცეში ბრუნვის მიმართ ინვარიანტულობის გამო, მივიღებთ, რომ (63) გამოსახულებაში მარჯვენა მხარე ტოლია

$$(2\pi)^{-N/2} \int_{\pi_0} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} (y'_m)^2\right\} dy'_1 \dots dy'_N =$$

$$= \prod_{m=1}^{N} (2\pi)^{-1/2} \int_{I_m} exp\left\{-\frac{(y'_m)^2}{2}\right\} dy'_m.$$

ტოლობა (59) და შესაბამისად, თეორემა 10 დამტკიცებულია.

§3. კრებადობა ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას და უპირობო კრებადობა

ამ პარაგრაფში მოცემულია 1 და 2 პარაგრაფების შედეგების გამოყენება ორთოგონალური მწკრივების თეორიაში.

განსაზღვრება 3. მწკრივს

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad (64)$$

რომლის წევრებიც არიან X წრფივი მეტრიკული სივრცის ელემენტები ეწოდება X-ში კრებადი ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას თუ თითქმის ყველა $t \in (0;1)$-სთვის , მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) x_n, \qquad (65)$$

კრებადია X სივრცის მეტრიკაში (აქ $\{r_n\}$ არის რადემახერის სისტემა (იხ. პარაგრაფი 1)). ანალოგიურად განისაზღვრება ფუნქციონალური მწკრივის კრებადობა ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას.

მიდგომა, რომელიც იყენებს (65) შემთხვევით მწკრივებს (64) მწკრივის თვისებების შესასწავლად, ხშირად ძალიან საინტერესოა და საჭიროებს დაწვრილებით შესწავლას.

განსაზღვრება 3 პირდაპირ დაკავშირებულია მწკრივების უპირობო კრებადობის განსაზღვრებასთან X სივრცეში, მაგრამ როგორც შემდეგში აღმოჩნდება, ნიშნების ნებისმიერი შერჩევის დროს კრებადობის შესწავლა გაცილებით მარტივია, ვიდრე უპირობო კრებადობის შემთხვევაში.

თეორემა 11. დავუშვათ, მოცემულია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0;1), \qquad (66)$$

შემდეგი სამი პირობა ერთმანეთის ექვივალენტურია

1) მწკრივი (66) ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას თითქმის ყველგან კრებადია;

2) მწკრივი (66) ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევის დროს კრებადია ზომით;

3) თითქმის ყველგან კრებადია ჯამი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$.

დამტკიცება. ნათელია, რომ 1) დან გამომდინარეობს 2). დავამტკიცოთ, რომ 2)⟹3), ხოლო შემდგომ, რომ 3)⟹1).

დავუშვათ საწინააღმდეგო, 2) პირობა შესრულებულია, მაგრამ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) = \infty, \qquad \text{როცა } x \in E, \qquad m(E) = \gamma > 0. \qquad (67)$$

მაშინ, არსებობს $\{N_s\}_{s=1}^{\infty}$ მთელი რიცხვების ისეთი მიმდევრობა, რომ $1 < N_1 < N_2 < \dots$

და

$$m(E_s) \equiv m\left(\left\{x \in (0;1): \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} f_n^{\,2}(x) > s\right\}\right) > \frac{\gamma}{2}, \qquad s \in \{1,2,\dots\}. \tag{68}$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 7-ის ა) პირობას რადემახერის სისტემის პოლინომებისთვის

$$P_s(t;x) = \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} r_n(t) f_n(x),$$

(სადაც ჩავთვლით, რომ $x \in E_s$ ფიქსირებულია) და გავითვალისწინებთ $x \in E_s$ და (68)-ს, მივიღებთ, რომ $\|P_s\|_2 > s^{1/2}$. საიდანაც

$$m\left(\left\{t \in (0;1): |P_s(t;x)| > \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}}\right\}\right) > c > 0, \qquad x \in E_s.$$

ამიტომ ორგანზომილებიანი ლებეგის ზომისთვის გვექნება

$$m_2\left(\left\{(t;x) \in (0;1) \times (0;1): |P_s(t;x)| > \tfrac{1}{2} s^{1/2}\right\}\right) > c\, m(E_s) > \tfrac{c\gamma}{2}. \tag{69}$$

(69)-დან გამომდინარეობს, რომ თუ G_s არის შემდეგი სიმრავლე

$$G_s = \left\{t \in (0;1): m\left(\left\{x \in (0;1): |P_s(t;x)| > \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}}\right\}\right) > \frac{c\gamma}{4}\right\},$$

მაშინ, $m(G_s) \geq \frac{c\gamma}{4}$, $s \in \{1,2,\dots\}$, და მაშასადამე, $m\left(\overline{\lim_{s\to\infty}} G_s\right) \geq \frac{c\gamma}{4}$. მაგრამ თვით $\overline{\lim_{s\to\infty}} G_s$ სიმრავლის განსაზღვრებიდან ყოველი $t \in \overline{\lim_{s\to\infty}} G_s$ რიცხვისთვის მოიძებნება s ინდექსების უსასრულო მიმდევრობა, რომელთათვისაც $t \in G_s$ ანუ

$$m\left(\left\{x \in (0;1): |P_s(t;x)| > \frac{1}{2} s^{\frac{1}{2}}\right\}\right) > \frac{c\gamma}{4}.$$

შედეგად, ნებისმიერი $t \in \overline{\lim_{s\to\infty}} G_s$-სთვის მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) f_n(x) \tag{70}$$

არ არის ზომით კრებადი, რაც ეწინააღმდეგება პირობა 2)-ს. ამით ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ 2) ⟹3). დავუშვათ, რომ შესრულებულია პირობა 3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty, \quad x \in E, \qquad m(E) = 1. \tag{71}$$

განვიხილოთ $(0;1) \times (0;1)$ კვადრატის (t, x) წერტილების F სიმრავლე, რომლისთვისაც არ არის კრებადი (70) მწკრივი. თეორემა 9-ის (71)-ის ძალით გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისთვის

$$m(\{t \in (0;1): (t; x) \in F\}) = 0,$$

აქედან ფუბინის თეორემის თანახმად (იხ. აგრეთვე (71)) გვექნება

$$\int_0^1 \int_0^1 \chi_F(t,x)dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \chi_F(t,x)dtdx = \int_E \int_0^1 \chi_F(t,x)dtdx = 0,$$

ანუ თითქმის ყველა $t \in (0;1)$ რიცხვებისთვის $\int_0^1 \chi_F(t;x)dx = 0$, რაც ნიშნავს (70) მწკრივის კრებადობას თითქმის ყველა $x -$თვის ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას. $3) \Rightarrow 1)$ შესრულებულია და თეორემა 11 დამტკიცებულია.

თეორემა 11- დან და ანალიზის ცნობილი შედეგიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

შედეგი 4. თუ მწკრივი (66) უპირობოდ ზომით კრებადია (ან მით უმეტეს თითქმის ყველგან),

მაშინ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$, თითქმის ყველა $x \in (0;1)$ რიცხვისთვის.

შემდეგი შედეგი გვიჩვენებს, რომ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{1/2}$ ფუნქციის ქცევის ტერმინებში შეიძლება დავახასიათოთ კრებადობა $L^p(0;1)$ სივრცეში, $1 \le p \le \infty$, ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას (66) სახის მწკრივთა $f_n \in L^p(0;1)$ ელემენტებით.

თეორემა 12. იმისათვის, რომ მწკრივი (66) $f_n \in L^p(0;1)$ ელემენტებით, $n \in \{1,2,\dots\}$, კრებადი იყოს ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას $L^p(0;1) -$ში, $1 \le p \le \infty$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{1/2} \in L^p(0;1). \tag{72}$$

ლემა 1. დავუშვათ, მოცემულია მწკრივი რადემახერის სისტემით

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

და დავუშვათ, $1 \leq p < \infty$. მაშინ ნებისმიერი $E \subset (0;1)$ სიმრავლისთვის, სადაც $m(E) > 1 - \delta$, $c > 0$, $\delta > 0$ არიან აბსოლუტური მუდმივები, სამართლიანია უტოლობები:

$$ა)\ \|P^*(t)\|_p \leq C_P \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad P^*(t) = \sup_{1\leq r\leq\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|;$$

$$ბ)\ \|P^*(t)\|_{L^p(E)} \geq \|P(t)\|_{L^1(E)} \geq c\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

დამტკიცება. იმის გამო, რომ მოცემული მწკრივი კრებადია თითქმის ყველგან და $L^p(0;1)$-ში (იხ. თეორემები 9 და 6), საკმარისია ჩვენ დავამტკიცოთ ლემა 1 იმ შემთხვევისთვის, როცა $P(t)\ \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t)$ არის პოლინომი. ამასთან ა) ნაწილი მტკიცდება $P(t)$-სთვის (57)-ე შეფასების თანმიმდევრული გამოყენებით და შემდგომ ხინჩინის უტოლობით (თეორემა 6). ბ) ნაწილის დასამტკიცებლად გავიხსენოთ, რომ თეორემა 7-ის თანახმად

$$m(Q) \equiv m\left(\left\{t \in (0;1) : |P(t)| > \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right) > c' > 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\delta = \frac{1}{2}c'$, ნებისმიერი $E \subset (0;1)$, $m(E) > 1 - \delta$ სიმრავლისთვის, გვექნება $m(E \cap Q) \geq \frac{1}{2}c'$ და

$$\|P\|_{L^1(E)} \geq \int_{E\cap Q} |P(t)|\,dt \geq \frac{c'}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ცნობილია, რომ ლემა 1-დან შეფასება ა)-ს ადგილი აქვს არამხოლოდ დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემისთვის, არამედ ნებისმიერი ისეთი ო.ნ.ს.-თვის, რომ რომელიღაც $p > 2$ რიცხვისთვის თითოეული $P(x)$ პოლინომისთვის სრულდება უტოლობა $\|P\|_p \leq C\|P\|_2$.

თეორემა 12-ის დამტკიცება. (72) პირობის საკმარისობის დასამტკიცებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, რომ (72) შესრულებულია, მაგრამ $t \in E, m(E) = \gamma > 0$ -სთვის (70) მწკრივი არ არის კრებადი $L^p(0;1)$-ში. ეს ნიშნავს, რომ მოიძებნება $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ მთელ რიცხვთა

მიმდევრობა და $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ ზომადი მთელმნიშვნელობებიანი ფუნქციების მიმდევრობა ისეთი, რომ $N_k \leq M_k(t) < N_{k+1}, t \in (0;1),\ k \in \{1,2,\dots\}$, რომ $k \in \{1,2,\dots\}$ –სთვის

$$\left\|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t) f_n\right\|_p \geq \rho > 0, \qquad t \in E_k, \quad m(E_k) > \frac{\gamma}{2}.$$

უკანასკნელი შეფასებიდან ფუბინის თეორემის გამოყენებით ვპოულობთ, რომ $k \in \{1,2,\dots\}$-სთვის

$$\int_0^1 \int_0^1 \left|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t) f_n(x)\right|^p dtdx \geq \frac{\gamma}{2}\rho^p \equiv c > 0. \tag{73}$$

მაგრამ ლემა 1-ის ა) პუნქტიდან გამომდინარე ნებისმიერი $x \in (0;1)$-სთვის

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t) f_n(x)\right|^p dt \leq C_P \left(\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} f_n^2\,(x)\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{74}$$

(73) და (74) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $k \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვებისთვის

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} f_n^2\,(x)\right)^{p/2} dx > c > 0.$$

მაგრამ, ეს უტოლობა ეწინააღმდეგება (72)-ის პირობას, ვინაიდან (72)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{N\to\infty} \left\|\left(\sum_{n=N}^{\infty} f_n^2\right)^{1/2}\right\|_p = 0.$$

ამით (72) პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია. ახლა დავამტკიცოთ მისი აუცილებლობა.

დავუშვათ, (70) მწკრივი კრებადია თითქმის ყველა $t \in (0;1)$ – სთვის $L^p(0;1)$-ში. მაშინ ცხადია, რომ (70) მწკრივი თითქმის ყველა $t \in (0;1)$-სთვის კრებადია ზომით და შესაბამისად, თეორემა 11-ის ძალით, კრებადია თითქმის ყველგან. ამიტომ, მწკრივი (70) კრებადია $(0,1) \times (0,1)$ – ზე თითქმის ყველა წერტილისთვის და მისი ჯამი ზომადია (როგორც ორი ცვლადის ფუნქცია). აღვნიშნავთ აგრეთვე, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\,(x) < \infty$ თითქმის ყველა x-ისთვის (იხ. თეორემა 11).

დაშვების თანახმად ფუნქცია

$$\psi(t) = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) f_n(x)\right|^p dx$$

სასრულია თითქმის ყველა $t \in (0;1)$ რიცხვისთვის. ამიტომ შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი სიმრავლე $E \subset (0;1)$, $m(E) > 1 - \delta$ ($\delta > 0$ არის მუდმივი ლემა1-ის ზ)-პუნქტის ძალით) და K მუდმივი, ისეთი, რომ $\psi(t) \leq K, x \in E$.

მაშინ ფუბინის თეორემის ძალით

$$\int_0^1 \int_E \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) r_n(t)\right|^p dt dx = \int_E \psi(t) dt \leq K. \tag{74'}$$

შეფასება $(74')$ – ის მარცხენა ნაწილის შიდა ინტეგრალის შეფასებისას ლემა 1-ის ზ) ნაწილის დახმარებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$ ჯამი სასრულია თითქმის ყველა x-ისთვის მივიღებთ, რომ

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{p/2} dx \leq K.$$

თეორემა 12 დამტკიცებულია.

შედეგი 5. (66) მწკრივის $L^p(0;1)$ –ში, $1 \leq p < \infty$, კრებადობისთვის ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას საკმარისია, რომ შესრულდეს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^q < \infty, \qquad q = \min(2, p).$$

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\right)^{1/2} \right\|_p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q = \min(2, p). \tag{75}$$

თუ $1 \leq p \leq 2$, ნებისმიერი $x \in (0;1)$ რიცხვისთვის

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

(ვინაიდან $\|y\|_{l^r} \leq \|y\|_{l^p}$ $1 \leq p \leq r$-სთვის), მაშასადამე,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{\frac{p}{2}} dx \le \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p.$$

როცა $2 < p < \infty$, გვაქვს

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\right)^{1/2}\right\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\right\|_{p/2}^{1/2} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^2\|_{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ეს უკანასკნელი ამტკიცებს (75) უტოლობას და, მაშასადამე, შედეგი 5 დამტკიცებულია.

თეორემა 12 გვიჩვენებს, რომ (66) მწკრივის კრებადობა $L^p(0;1) -$ ში, $1 \le p < \infty$, ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას დამოკიდებულია მხოლოდ $|f_n(x)|$ სიდიდეების ქცევაზე და არ არის დამოკიდებული $f_n(x), n \in \{1,2,\dots\}$ ფუნქციების ნიშნებზე. თუ $p = \infty$, ეს უკვე ასე აღარ არის. მართლაც,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)}(x), \qquad f_n^{(1)} = a_n = const, \qquad x \in (0;1),$$

მწკრივი კრებადია $L^\infty(0;1) -$ ში ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (იხ. თეორემები 8 და 9). თუმცა, მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(2)}(x), \qquad f_n^{(2)} = a_n r_n(x), \quad x \in (0;1),$$

კრებადია $L^\infty(0;1)$ -ში ნიშნის თითქმის ყველა შერჩევისას მხოლოდ მაშინ, როცა $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, მიუხედავად იმისა, რომ $\left|f_n^{(1)}(x)\right| = \left|f_n^{(2)}(x)\right|$, თითქმის ყველა $x \in (0;1)$ რიცხვისთვის.

$f_n^{(2)}(x) = a_n r_n(x),\ n \in \{1,2,\dots\}$ მიმდევრობის მაგალითი (რომლის მოდიფიცირება ადვილია, იმისათვის, რომ ფუნქცია $f_n^{(2)}(x)$ გავხადოთ უწყვეტი), გვიჩვენებს აგრეთვე, რომ ნორმის ტერმინებში ფუნქციას არ შეიძლება მივცეთ არატრივიალური მნიშვნელობები, ანუ უკეთესი $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_C$ მწკრივის კრებადობა რომელიც უზრუნველყოფს $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) f_n(x)$ მწკრივის თანაბარ კრებადობას თითქმის ყველა $t \in (0;1)$ რიცხვისთვის. ამასთანავე, $f_n(x)$ ფუნქციის ნიშნების შესახებ ინფორმაციის გამოყენებით, შეიძლება რიგ შემთხვევაში არატრივიალური შედეგების მიღება ამ მწკრივის თანაბარი კრებადობის შესახებ თითქმის ყველა $t \in (0;1)$- სთვის. მაგალითად, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ $f_n(x) = \int_0^x \varphi_n(y)dy,\ n \in \{1,2,\dots\}$ სადაც $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ არის ნებისმიერი ო.ნ.ს., მაშინ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ თანაბრად კრებადია [0;1]-ზე ნიშნის ნებისმიერი შერჩევისას (თუმცა მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_C$ გამშლადია $\{\varphi_n\}$ ო.ნ.ს.-ის ფართო კლასისთვის, მათ შორის ტრიგონომეტრიული სისტემისთვის და ჰაარის სისტემისთვის).

ქვემოთ ჩვენ რამდენიმეჯერ გამოვიყენებთ შემდეგ შეფასებას (ფაქტიურად უკვე გამოყენებულს თეორემა 12-ის დამტკიცების დროს) $\{f_n\}_{n=1}^{N} \subset L^p(0;1) \quad 1 \le p < \infty$, ფუნქციათა ნებისმიერი სისტემისთვის

$$c_p \left\| \left(\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le \left\{ \int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{N} r_n(t) f_n \right\|_p^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \le \le C_p \left\| \left(\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p . \quad (76)$$

სადაც C_p და $c_p > 0$ - არიან მუდმივები, რომლებიც დამოკიდებული არიან მხოლოდ p-ზე. (76)-ის შეფასებები გამომდინარეობენ 6 და 7 თეორემებიდან და ფუბინის თეორემიდან).

(76) უტოლობების გამოყენებით დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა უპირობო ბაზისების შესახებ.

თეორემა (უპირობო ბაზისების შესახებ): იმისთვის, რომ სრული და მინიმალური სისტემა $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ იყოს უპირობო ბაზისი $L^p(0;1) -$ში, $1 < p < \infty$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $f \in L^p(0;1)$ ფუნქციისთვის სასრული იყოს შემდეგი მწკრივი თითქმის ყველგან $P(f) = P(f;x) = \{\sum_{n=1}^{\infty} [\langle f, \psi_n \rangle \varphi_n(x)]^2\}^{1/2}$ და სრულოდებოდეს შემდეგი უტოლობა

$$B\|f\|_p \le \|P(f)\|_p \le A\|f\|_p.$$

დამტკიცება: ა) დავუშვათ, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ არის უპირობო ბაზისი $L^p(0;1), 1 < p < \infty$-ში, ხოლო $\{\psi_n\}$ არის მისი შეუღლებული სისტემა. თუ ვისარგებლებთ შემდეგი თეორემით და შედეგით: იმისთვის, რომ სრული და მინიმალური X სისტემა $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ იყოს უპირობო ბაზისი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ვიპოვოთ მუდმივი M, ისეთი, რომ ყოველი სისტემისთვის $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ ყოველი $1 \le n \le N$, $N \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვისთვის შესრულდეს $\|\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n\| \le M\|x\|$ და იმისთვის, რომ სრული და მინიმალური X სისტემა $\{x_n\}$ იყოს უპირობო ბაზისი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ რიცხვისთვის განსაზღვრულნი არიან T_{ε_x} ოპერატორით, რომლის ნორმა არის მუდმივი და არაა დამოკიდებული $\varepsilon -$ზე. აქედან გამომდინარე, $B\|x\| \le \|T_{\varepsilon_x}\| \le A\|x\|, x \in X.$ ამიტომ, ჩვენ ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $f \in L^p(0;1)$ ფუნქციისთვის და ნებისმიერი $t \in (0;1)$ ორობითი ირაციონალური რიცხვისთვის როცა $N > N(f)$ სამართლიანია უტოლობები:

$$b\|f\|_p \le \left\|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n\right\| \le a\|f\|_p, \qquad (77)$$

სადაც მუდმივები a და $b > 0$ არ არიან დამოკიდებული f –ზე. (77)-ის მარჯვენა უტოლობა სრულდება ყველა $N \in \{1,2,\dots\}$ - სთვის. მარცხენა უტოლობა სრულდება ისეთი N-სთვის, რომ

$$\left\|f - \sum_{n=1}^{N}\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n\right\| \le \frac{1}{2}\|f\|_p.$$

თუ გამოვიყენებთ (76) უტოლობებს, როცა $f_n(x) = \langle f,\psi_n\rangle\varphi_n(x)$, $1 \le n \le N$ და შემდეგ $N \to \infty$ ზღვარზე გადასვლით, (77)-ის თანახმად, მივიღებთ, რომ

$$m\|f\|_p \le \left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \le M\|f\|_p, \qquad (m > 0). \qquad (77')$$

ბ) დავუშვათ, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ სრული და მინიმალური სისტემაა $L^p(0;1)$-ში, რომლის შეუღლებული სისტემაა $\{\psi_n\}$. ამასთან, შესრულებულია (77') უტოლობები და მოცემულია ნებისმიერი სიმრავლე $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$, $\varepsilon_n = \pm 1, n \in \{1,2,\dots,N\}$, მაშინ (77')-დან გამოდის, რომ ნებისმიერი $f \in L^p(0;1)$ ფუნქციისთვის გვექნება

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n\right\|_p \le m^{-1}\left\|\left\{\sum_{n=1}^{N}(\varepsilon_n\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n)^2\right\}^{1/2}\right\|_p \le$$

$$\le m^{-1}\left\|\left\{\sum_{n=1}^{N}(\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right\|_p \le Mm^{-1}\|f\|_p,$$

და ამიტომ $\{\varphi_n(x)\}$ -არის უპირობო ბაზისი $L^p(0;1)$ – ში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. $L^1(0;1)$ სივრცეში არ არსებობს უპირობო ბაზისი.

დამტკიცება. უპირველესად აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $g(x) \in L^1(0;1)$ ფუნქციისთვის სრულდება

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)r_n(x)dx = 0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|g + r_n g\|_1 = \|g\|_1, \qquad (78)$

სადაც $\{r_n\}$ არის რადემახერის სისტემა.

ცნობილი თეორემიდან გამომდინარეობს ტოლობა 1) (78)-ში. საბოლოოდ, რადემახერის სისტემის განმარტების (იხ. (9)) ძალით გვექნება

$$\|g + r_n g\|_1 - \|g\|_1 = \sum_{i=1}^{2^n} \left[\int_{(i-1)/2^n}^{i/2^n} |g(x)|\,|1 + r_n(x)| dx - \int_{(i-1)/2^n}^{i/2^n} |g(x)|\, dx \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^{i-1} \int_{(i-1)/2^n}^{i/2^n} |g(x)| dx \le$$

$$\le \int_0^{1-2^{-n}} \big| |g(x)| - |g(x + 2^{-n})| \big|\, dx \le \omega_1(2^{-n}, |g|),$$

სადაც $\omega_1(\delta, |g|)$ არის $|g|$ ფუნქციის უწყვეტობის ინტეგრალური მოდული, ამასთან, როგორც ცნობილია, $\lim_{\delta \to 0} \omega_1(\delta, g) = 0$ ყოველი $g \in L^1(0;1)$-სთვის მიღებული შეფასებიდან გამომდინარეობს (78)-ში უტოლობა 2).

ახლა დავუშვათ საწინააღმდეგო: $\{\varphi_n\}$ იყოს უპირობო ბაზისი $L^1(0;1)$ -ში და $\{\psi_n\} \subset L^\infty(0;1)$ მისი შეუღლებული სისტემა, ანუ ყოველი $f \in L^1(0;1)$ ფუნქციისთვის მწკრივი

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n(x)$$

უპირობოდ კრებადია $L^1(0;1)$-ში.

ავაგოთ ინდუქციით g_s, $s \in \{1,2,\dots\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_s(x) = \sum_{j=0}^{s-1} g_j(x)\, r_{k_s}(x), \quad x \in (0;1), \quad s \in \{1,2,\dots\},$$

სადაც, მთელი k_s , $s \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვების მიმდევრობა ზრდადია ისეთი, რომ

ა) $\|g_s - u_s\|_1 \le 2^{-s-1}$ სადაც $u_s, s \in \{0,1,\dots\}$ - არიან თანაუკვეთი პოლინომები $\{\psi_n(x)\}$ ბაზისის მიმართ ე.ი.

$$u_s(x) = \sum_{n=M_s}^{M'_s} a_n\, \varphi_n(x), \qquad M_s \le M'_s < M_{s+1}, \qquad s \in \{0,1,\dots\};$$

ბ)

$$\frac{1}{2} < \|g_s\|_1 = \left\|\sum_{j=0}^{s-1} g_j\right\|_1 = \left\|(1 + r_{k_{s-1}})\sum_{j=0}^{s-2} g_j\right\|_1 < 2, \qquad s \in \{2,3, \dots\}.$$

საჭირო $\{k_s\}$ მიმდევრობის შერჩევა რომ შესაძლებელია, გამომდინარეობს (78) ტოლობებიდან. კერძოდ, ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ (78)-ის 1) ნაწილის თანახმად, $\lim_{\delta\to\infty} \langle gr_s, \psi_n\rangle = 0$ ნებისმიერი $g \in L^1(0;1)$, $n \in \{1,2, \dots,\}$ და ამიტომ ყოველი ფიქსირებული N-სთვის

$$\lim_{s\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} \langle gr_s, \psi_n\rangle \varphi_n\right\|_1 = 0.$$

ა) და ბ) შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left\|\sum_{j=0}^{s} u_j\right\|_1 \le 3, \left\|u_j\right\|_1 \ge \frac{1}{4}, \quad s, j \in \{0,1, \dots\}. \tag{79}$$

მაგრამ, ვინაიდან $\{\varphi_n\}$ არის უპირობო ბაზისი, მაშინ მოიძებნება ისეთი მუდმივი K რომ თითქმის ყველა $t \in (0;1)$-ის დროს $s \in \{0,1, \dots\}$

$$\left\|\sum_{j=0}^{s} r_j(t)u_j\right\|_1 = \left\|\sum_{j=0}^{s} r_j(t) \sum_{n=M_j}^{M'_j} a_n\, \varphi_n\right\|_1 \le K \left\|\sum_{j=0}^{s} \sum_{n=M_j}^{M'_j} a_n\, \varphi_n\right\|_1 \le 3K. \tag{80}$$

მეორეს მხრივ, (76)-ის თანახმად (იხ. აგრეთვე (79))

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=0}^{s} r_j(t)u_j\right\|_1 dt \ge c \left\|\left\{\sum_{j=0}^{s} u_j^2\right\}^{1/2}\right\|_1 \ge$$

$$\ge c(s+1)^{-1/2} \sum_{j=0}^{s} \left\|u_j\right\|_1 \ge \frac{c}{4}(s+1)^{\frac{1}{2}}. \tag{81}$$

საკმარისად დიდი s რიცხვისთვის შეფასებები (80) და (81) ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. რაც ამტკიცებს თეორემა 13-ს.

თეორემა 14. თუ (66) მწკრივი აკმაყოფილებს იმ თვისებას, რომ ნებისმიერი $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n \in \{-1; 1\}$ მიმდევრობისთვის მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x) \qquad (82)$$

კრებადია თითქმის ყველგან (0;1)-ზე, მაშინ ყოველი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x), \qquad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}, \qquad (83)$$

ასევე კრებადია თითქმის ყველგან (0;1)-ზე.

შედეგი 6. (66) მწკრივის უპირობო კრებადობა თითქმის ყველგან, იწვევს (83) მწკრივის უპირობო კრებადობას თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ნებისმიერი გადანაცვლებისთვის $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x)$ მწკრივი უპირობოდ კრებადია თითქმის ყველგან, საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს, რომ თითქმის ყველგან კრებადია შემდეგი სახის მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_{\sigma(n)}(x), \qquad \varepsilon_n \in \{-1; 1\}, \qquad n \in \{1,2, \dots\}.$$

აღნიშნულის შემდეგ, ისღა რჩება გამოვიყენოთ თეორემა 14, რომ ვაჩვენოთ $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} f_{\sigma(n)}(x)$ მწკრივის თითქმის ყველგან კრებადობა.

თეორემა 14-ის დამტკიცებაში დაგვჭირდება

ლემა 1. დავუშვათ, მოცემულია ფუნქციები $f_n \in L^2(0;1)$, $n \in \{1,2,\dots,N\}$ და რიცხვები λ_n, $|\lambda_n| \le 1$, $n \in \{1,2,\dots,N\}$, მაშინ მოიძებნება $\varepsilon_n = \{-1;1\}$, $n \in \{1,2,\dots,N\}$ რიცხვების ნაკრები ისეთი, რომ

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n \right\|_2^2 \le \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2. \qquad (84)$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $|\lambda_n| < 1, n \in \{1,2,\dots,N\}$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში დავუშვებთ $\varepsilon_n = \lambda_n$, როცა $|\lambda_n| = 1$ და დავამტკიცებთ ლემას დანარჩენი $f_n(x)$ ფუნქციებისთვის და λ_n რიცხვებისთვის).

დავუშვათ $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ არის დამოუკიდებელ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელიც $n \in \{1,\dots,N\}$ რიცხვებისთვის იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას $\lambda_n + 1$ და $\lambda_n - 1$, ამასთან

$$m(\{t \in (0;1): g_n(t) = \lambda_n + 1\}) = (1 - \lambda_n)/2.$$

$$m(\{t \in (0;1): g_n(t) = \lambda_n - 1\}) = \frac{(1+\lambda_n)}{2}. \tag{85}$$

($\{g_n\}$ სიმრავლის არსებობა ნაჩვენებია თეორემა 1-ში). (85)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^1 g_n(t)dt = 0, \quad \int_0^1 {g_n}^2(t)dt = 1 - {\lambda_n}^2 \leq 1, \;\; n \in \{1, \dots, N\}. \tag{86}$$

ვინაიდან $g_n(t), n \in \{1, \dots, N\}$ ფუნქცია წყვილ-წყვილად ორთოგონალურია (იხ. შედეგი 3), მაშინ (86)-დან მიიღება, რომ

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{N} g_n(t) f_n(x)\right]^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{N} g_n(t) f_n(x)\right]^2 dtdx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} f_n^2(x) \|g_n\|_2^2 \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2 \, (1 - \lambda_n^2) \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2.$$

ე.ი. არსებობს წერტილი $t_0 \in (0;1)$, რომლისთვისაც

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} g_n(t_0) f_n(x) \right\|_2^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2 \, . \tag{87}$$

თუ ავირჩევთ $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}, \varepsilon_n = \{-1; 1\}$, რიცხვების ნაკრებს ისე, რომ $n \in \{1, \dots, N\}$-სთვის სრულდებოდეს ტოლობა $g_n(t_0) = \lambda_n - \varepsilon_n$ (იხ.(85)), (87)-დან მივიღებთ ჩვენთვის საჭირო (84) შეფასებას. ლემა 1 დამტკიცებულია.

თეორემა 14 დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ თეორემის პირობებში მოიძებნება (83) სახის მწკრივი $|\lambda_n| \leq 1$-ით $n \in \{1,2, \dots\}$, რომელიც განშლადია $E \subset (0;1)$ სიმრავლის ყველა წერტილში და $m(E) > 0$.

თეორემა 11-ის თანახმად (82) სახის ყველა მწკრივის თითქმის ყველა კრებადობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$ თითქმის ყველა $x \in (0;1)$-სთვის, რაც ნიშნავს, შესაძლებელია ვიპოვოთ ისეთი სიმრავლე $E_1 \subset (0;1)$, რომ $m(E_1) > 1 - m(E)$, დავუშვათ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_1} f_n^2(x) dx < \infty.$$

დავუშვათ, რომ $E_2 = E \cap E_1$ და $g_n(x) = f_n(x) \chi_{E_1}(x), \; n \in \{1,2, \dots\}$, მაშინ ნათელია, რომ

ა) მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n g_n(x)$ კრებადია თითქმის ყველგან $(0;1) -$ ზე ნიშნების ნებისმიერი შერჩევისას $\varepsilon_n = \{-1; 1\}, n \in \{1,2, \dots\}$;

ბ) მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x)$ განშლადია $x \in E_2, m(E_2) > 0$,

გ) $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_2^2 < \infty$.

ვაჩვენოთ, რომ ა), ბ) და გ) პირობები ვერ შესრულდებიან ერთდროულად. ამით ჩვენ მივალთ წინააღმდეგობამდე.

ბ)-დან გამომდინარეობს რომ არსებობს რიცხვი $\varepsilon_0 > 0$ და A_k სიმრავლეების ზომით $m(A_k) \geq \gamma > 0$, $k \in \{1,2,\dots\}$. ასევე $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ ნატურალური რიცხვების და $M_k(x)$ ფუნქციების არსებობა, რომლებიც ზომადია $(0;1)$ -ზე, $N_k < M_k(x) \leq N_{k+1}, x \in (0;1), k \in \{1,2,\dots\}$ ისეთი, რომ

$$\left|\sum_{n=N_{k+1}}^{M_k(x)} \lambda_n g_n(x)\right| > \varepsilon_0, \quad x \in A_k, \quad k \in \{1,2,\dots\}. \tag{88}$$

$k \in \{1,2,\dots\}$ რიცხვებისთვის დავუშვათ, $\delta_k = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|g_n\|_2^2$. გ) დან გამოდის, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0 \tag{89}$$

დავაფიქსიროთ k რიცხვი და $N_k < n \leq N_{k+1}$ და $x \in (0;1) -$ სთვის დავუშვათ

$$u_n(x) = \begin{cases} g_n(x), \text{თუ } n \leq M_k(x), \\ 0, \text{თუ } n > M_k(x). \end{cases} \tag{90}$$

ფუნქციები u_n ზომადია, ეკუთვნიან $L^2(0;1)$ სივრცეს. რადგან ზომადია ფუნქციები g_n და M_k, $g_n \in L^2(0;1)$, და (იხ. (88)):

$$\left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n u_n(x)\right| > \varepsilon_0, \quad x \in A_k, \tag{91}$$

ლემა 1-ის ძალით მოიძებნება ისეთი $\{\varepsilon'_n\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$, $\varepsilon'_n = \{-1;1\}$ სიმრავლე, რომ

$$\left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n U_n - \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n\right\|_2^2 \leq \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|u_n\|_2^2 \leq \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|g_n\|_2^2 = \delta_k.$$

ბოლო შეფასებიდან, ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით და (89)-ის გათვალისწინებით ვპოულობთ, რომ $k > k_0$ რიცხვებისთვის

$$m(G_k) \equiv m\left(\left\{x \in (0;1): \left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n u_n(x) - \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n\,(x)\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{4\delta_k}{{\varepsilon_0}^2} < \frac{1}{2}\gamma.$$

ეს ნიშნავს, რომ $m(A_k \backslash G_k) > \frac{\gamma}{2}$, $k > k_0$. მაგრამ $x \in A_k \backslash G_k$ შემთხვევაში (91)-ის თანახმად გვექნება

$$\left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n(x)\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

ან რაც იგივეა (იხ. (90)),

$$\left|\sum_{n=N_k+1}^{M_k(x)} \varepsilon'_n g_n(x)\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad x \in A_k \backslash G_k, \qquad k \in \{k_0+1, \dots\}$$

ამიტომ, მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n g_n(x)$, $\varepsilon'_n = \pm 1$ განშლადია $\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k \backslash G_k)$ სიმრავლის ყველა წერტილში, და ვინაიდან $m\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}(A_k \backslash G_k)\right] \geq \frac{\gamma}{2} > 0$, მაშინ ეს ეწინააღმდეგება პირობა ა)-ს. თეორემა 14 დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ზომით კრებადობისთვის სამართლიანია მე-14 თეორემის ანალოგი, უფრო ზუსტად კი, ლემა 1-ის და შედეგი 4-ის გამოყენებით, ძნელი არ არის ვაჩვენოთ, რომ მოცემული მიმდევრობისთვის $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (82) სახის ყველა მწკრივის ზომით კრებადობა იწვევს (83) მწკრივის ზომით კრებადობას.

დასკვნა

ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა. მასში გადმოცემულია კლასიკური შედეგები დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ ფუნქციათა თეორიაში.

ამ საკითხებთან დაკავშირებით ნაშრომში მოყვანილია 15 თეორემა თავისი დამტკიცებით, 6 დამხმარე ლემა დამტკიცებით და მათგან გამოყვანილია 6 ძირითადი შედეგი.

აღნიშნული დებულებები და შედეგები შეეხება ისეთ მნიშვნელოვან საკითხებს ფუნქციათა თეორიაში, როგორებიცაა უპირობო ბაზისები, თითქმის ყველგან კრებადობა, უპირობო კრებადობა, ნორმით, თითქმის ყველგან და ზომით კრებადობები ნიშნების თითქმის ყველა შერჩევისას. მოყვანილი დებულებებიდან გამომდინარეობს ერთ-ერთი ძალიან საინტერესო შედეგი: L^1 სივრცეში არ არსებობს უპირობო ბაზისი.

ზემოთთქმულიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ დამოუკიდებელ ფუნქციათა მიმდევრობის ცნება და მასთან დაკავშირებული დებულებები თამაშობენ მნიშვნელოვან როლს მათემატიკის განვითარებაში, კერძოდ, ფუნქციათა თეორიაში.

ლიტერატურა

Б. С. Кашин, А. А. Саакян – Ортогональные ряды, Издательство АФЦ, Москва 1999.