ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელწიფო უნივერსიტეტი

გიორგი ბაკურაძე

# იერარქიული მოდელები თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისათვის

# Hierarchical models for  thermoelastic Kelvin-Voight piezoelectric prismatic shells

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის

აკედემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი : პროფესორი გიორგი ჯაიანი

თბილისი 2019

# სარჩევი

ანოტაცია ... 3
Summary ... 5
შესავალი ... 6
1.ველის განტოლებები თერმოდრეკადი პიეზოელექტრული კელვინ-ფოიგტის მასალებისთვის სიცარიელეებით ... 10
2. იერარქიული მოდელის აგება. $N-$ური მიახლოება ... 13
3. $N=0$ მიახლოება ... 38
4. პიეზოელექტრული ანტიბრტყელი დეფორმაცია N=0 მიახლოებაში ... 42
დასკვნა ... 47
გამოყენებული ლიტერატურა ... 48

# ანოტაცია

1955 წელს ილია ვეკუამ [1] გამოაქვეყნა დრეკადი პრიზმული გარსების მოდელები, მან იმ გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება, „წამახვილებული" გარსები უწოდა, ხოლო 1965 წელს მან შემოგვთავაზა ანალოგიური მოდელები სტანდარტული გარსებისთვის [2] და ორივე ნაშრომში ხაზი გაუსვა წამახვილებული გარსებისთვის სასაზღვრო ამოცანების მნიშვნელობას, რაც დაკავშირებულია გადაგვარებულ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებთან, კორექტულად დასმის საკითხის გამოკვლევის პრაქტიკაში წამახვილებული გარსები ხშირად გვხდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორიცაა სტადიონის სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა. შ. გარდა ამისა, მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარადნავი ჩარხები ), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში, და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში ). წამხვილებული გარსების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ როგორც სამგანზომიელბანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ არალიფშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანებს სტატიკის შემთხვევაში მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის საკითხამდე, ხოლო დინამიკის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხებამდე. (შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით მოცემულია მიმოხილვები [3] და [4]-ში, აგრეთვე ილია ვეკუას კომენტარები [5]-ში (გვ. 86) და [12] ).

პიეზოელექტრული მასალები, პრიზმული გარსები, ფირფიტები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა საინჟინრო სტრუქტურებსა და თანამედროვე ტექნოლოგიებში. აქედან გამომდინარე მნიშვნელოვანია ავაგოთ და გამოვიკვლიოთ მათი სამგანზომილებიანი მოდელების მიახლოებითი ალგორითმები.

პიეზოელექტრული არაერთგვაროვანი ფოროვანი დრეკადი და ბლანტი-დერაკდი კელვინ-ფოიგტის პრიზმული გარსებისთვის იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ [6]. ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით აგებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების $N$-ურ მიახლოებაში

დასმულია სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. (იხილეთ [6] ) $N=0$ მიახლოებაში გამოკვლეულია სასაზღვრო პირობების კორექტულად დასმის საკითხები.

ნაშრომში თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისათვის სიცარიელეებით აგებულია იერარქიული მოდელები. სახელდობრ, ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების $N$-ურ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. განხილულია ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული მასალის ანტიბრტყელი დეფორმაცია $N=0$ მიახლოებაში, დასმული და გამოკვლეულია შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

# Summary

In 1955 Ilia Vekua [1] published his models of elastic prismatic shells, prismatic shells whose cross-sections area vanishes at least at one end of the prismatic shells, he called “cusped” prismatic shells and In 1965 he offered analogous models for standart shells [2]. In both papers he considered a very important investigation of well-posedeness of BVPs (boundary value problems) of peculiar types which could arise in the case of cusped shells. In practice, cusped prismatic shells areoften encountered in spatial structures with partly fixed edges e.g., stadiumceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tool design, as incutting-machines, plannings-machines, in astronautics, turbines, and in manyother application fields of engineering. Investigation of elastic cusped prismatic shells, considered as 3D ones, may occupy 3D domains with, in general, non-Lipschitz boundaries. The problem mathematically leads to equation of setting and solving of boundary value problems for even order equations and systems of elliptic type with the order degeneration in the statical case and of initial boundary value problems for even order equations and systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamical case.(for corresponding investigations see the survey [3],[4] and also I. Vekua’s comments in[5] (p.86) and [12]).

Piezoelectric materials are widely used in modern engineering structures and technology. hence it is important to construct and investigate algorithms of approximation of three-dimensional models of them by twodimensional.

G. Jaiani constructed hierarchical models for piezoelectric nonhomogeneous porous elastic and viscoelastic Kelvin-Voigt prismatic shells on the basis of linear theory. Using I. Vekua’s dimension reduction method, governing systems are derived and in the Nth approximation of hierarchical models BVPs and IBVPs are set. [6]

The present work is devoted to construction of hierarchixal models for thermoelastic Kelvin-Voight piezoelectric prismatic shells. Using I. Vekua’s dimension reduction method, governing systems are derived and in the Nth approximation of hierarchical models BVPs and IBVPs are set. There is considered Antiplane deformation of transversaly isotropic piezoelectric materials and Bvps are set and investigat

# შესავალი

1955 წელს ილია ვეკუამ [1] გამოაქვეყნა დრეკადი პრიზმული გარსების მოდელები, მან იმ გარსებს, რომელთა სისქე საზღვარზე ნული ხდება, „წამახვილებული“ გარსები უწოდა, ხოლო 1965 წელს მან შემოგვთავაზა ანალოგიური მოდელები სტანდარტული გარსებისთვის [2] და ორივე ნაშრომში ხაზი გაუსვა წამახვილებული გარსებისთვის სასაზღვრო ამოცანების მნიშვნელობას, რაც დაკავშირებულია გადაგვარებულ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებთან, პრაქტიკაში წამახვილებული გარსები ხშირად გვხდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორიცაა სტადიონის სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა. შ. გარდა ამისა, მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარადნავი ჩარხები ), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში, და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში ). წამხვილებული გარსების მიერ დაკავებული არეები, თუ მათ განვიხილავთ როგორც სამგანზომიელბანს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ არალიფშიცური საზღვრებით. ამ ამოცანებს სტატიკის შემთხვევაში მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის საკითხამდე, ხოლო დინამიკის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხებამდე. (შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით მოცემულია მიმოხილვები [3] და [4]-ში, აგრეთვე ილია ვეკუას კომენტარები [5]-ში (გვ. 86) და [12] ). ამავე პერიოდში ილია ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ პრიზმული გარსების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვალდის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N+1$ წევრის შენარჩუნებით მან შემოიღო ე.წ $N$-ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი ეს მიახლოება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი.

ზოგიერთი ამოცანა ცვლადი სისქის წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისთვის გამოკვლეული და განხილული იყო მ. მახოვერის, ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ. ჯაიანის, გ. ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ს. ნაგულესვარანის, ნ. ჩინჩალაძის, და ს. ხარიბეგაშვილის შრომებში [3, 4, 7]. ამ ავტორების შრომები ძირითადად ეძღვნება ხარისხოვანი კანონით ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტების და ღეროების შესწავლას ბერნულ-ეილერის ღეროების, კირჰხოფის ფირფიტების და ი.ვეკუას იერარქიული მოედელბის ნულოვანი და პირველი მიახლოების ბაზაზე.

[4]-ში ლიპშიცის არეების შემთხვევაში გ. ჯაიანმა, ს, ხარიბეგაშვილმა, დ. ნატროშვილმა და ვ. ვენდლადმა ააგეს ორგანზომელბიანი იერარქიული მოდელები დრეკადი წამახვილებული პრიზმული გარსებისთვის. ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით სათანადო წონიან ფუნქციონალურ სივრცეებში დაამტკიცეს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები შესაბამისი ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანებისათვის. ამ ორგანზომიელაბიანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნების საშუალებით ააგეს სამგანზომილებიანი არისთვის მიახლოებითი ამონხასნების მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა სობოლევის $H^1$ სივრცეში კრებადია ამოსავალი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისკენ. ცხადი სახით არის ამოწერილი ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელების შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები ზოგადი ორთოგონალური სიტემისათვის და კერძოდ ლეჟანდრის პოლინომებისთვის.

შემთხვევებს, როცა პრიზმული გარსის სისქე საზღვარზე ნულდება მიეძღვნა ე. მახოვერის, ს. მიხლინის, ა. ხვოლესის, გ. ჯაინის, ს. ხარიბეგაშვილის, ვ. ვენდლანდის, [4] გ. ჯაიანის, [7] ნ. ჩინჩალაძის, [8] გ.ჯაიანის და სხვათა სრომები. ნ ჩინჩალაძის, გ. ჯაიანის, ბ. მაისტრენკოს და პ. პოდიო-გუიდულის მიერ იერარქიული მოდელების ფარგლებში შესწავლილი იყო წამახვილებულ პრიზმულ სხეულებში შინაგანი შეყურსული ძალების წარმოქმნის საკითხი. შემდგში ი. ვეკუას მეთოდის განზოგადებით განხილული იყო დრეკადი ღეროების ერთგანზომელაბიანი იერეაქიული მოდელების აგების და გამოკვლევის საკითხი გ. ჯაიანის, ს. ხარიბეგაშვილის, დ. ნატროშვილის, ვ. ვენდლანდის [4] და მ. და გ. ავალიშვილების [9-11] მიერ. წამავილებულ სტანდარტულ და პრიზმულ გარსებთან დაკავშირებით მიღებული შედეგები დაწვრილებით არის მიმოხილული გ. ჯაიანის მონოგრაფიაში. [12]

მეთვრამეტე საუკუნის შუა ხანებში კარლოს ლინეასმა და ფრენც ეპინესმა პირველად გამოიკვლიეს გარკვეული მასალები, ისეთი კრისტალები და კერამიკები, რომლებიც

წარმოქმნიდნენ ელექტრულ მუხტებს ტემპერატურის ცვლილებისას. მოგვიანებით ჟაკ და პერ კიურიმ აღმოაჩინეს უცნაური თვისება, რომ ზოგიერთ კრისტალურ მინერალებში, როგორებიცაა ტურმალინი, ტოპაზი, კვარცი, შაქრის ლერწამი და როშელის მარილი, დაძაბულობა და კომპრესია წარმოქმნიდა დატვირთვის პროპორციულ საპირისპირო პოლარობის ძაბვებს. ჰენკელმა მას პიეზოელექტრული ეფექტი უწოდა. სიტყვა პეზოელექტროობა ბერძნულია და ნიშნავს ელქტრობას მიღებულს ზემოქმედების შედეგად. პირდაპირი პიეზოელექტრული ეფექტის აღმოჩენის შემდეგ, ლიპმანმა ივარაუდა შებრუნებული პიეზოელექტრული ეფექტის არსებობა, ძირითად თერმოდინამიკურ პრიცნიპებზე დაფუძნებით. 1881 წლის მიწურულს ძმებმა კიურებმა ექსპერიმენტულად დაადასტურეს შებრუნებული პეზოელექტრული ეფექტის არსებობა. მათ აჩვენეს, რომ თუ რომელმე ძაბვის წარმომქმნელი კრისტალს მოათავსებდნენ ელქტრულ ველში, იგი წარგძლედებოდა ან დამოკლდებოდა ველის პოლარობის შესაბამისად და ძალის პროპორციულად. [13]

პიეზოელექტრული მასალები, პრიზმული გარსები, ფირფიტები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა საინჟინრო სტრუქტურებსა და თანამედროვე ტექნოლოგიებში. აქედან გამომდინარე მნიშვნელოვანია ავაგოთ და გამოვიკვლიოთ ფირფიტების სამგანზომილებიანი მოდელების მიახლოებითი ალგორითმები. თეორმოდრეკადი პიეზოლექტრული მასალების, მათ შორის ცლადი სისქის ფირფიტების იერაქიული მოედელბის აგებას და შესაბამისი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმასა და გამოკლვლეას ეძღვნება გ. და მ. ავალიშვილების შრომები. [14-17]

პიეზოელექტრული არაერთგვაროვანი ფოროვანი დრეკადი და ბლანტი-დერაკდი კელვინ-ფოიგტის პრიზმული გარსებისთვისს იერარქიული მოდელები აგებულია გ. ჯაიანის მიერ. ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტლებათა სიტსტემა და იერარქიული მოდელების $N$-ურ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. [6]

ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი თავისა და მითითებული ლიტერატურისაგან.

პირველ თავში მოყვანილია ძირითადი განტოლებები თერმოდრეკადი პიეზოელექტრული კელვინ-ფოიგტის მასალებისთვის სიცარიელეებით და დასმულია შესაბამისი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები.

მეორე თავში ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სიტემა, აგებულია იერარქიული მოდელების უსასრულო და $N-$ *ური* მიახლოება.

მესამე თავში მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა იერარქიული მოდელების $N=0$ მიახლოებაში. განხილულია სტატიკური შემთხვევა, როდესაც განტოლებათა სისტემა დამოკიდებულია მხოლოდ $x_2$ ცვლადზე.

მეოთხე თავში განხილულია ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული მასალის ანტიბრტყელი დეფორმაცია $N=0$ მიახლოებაში, დასმული და გამოკვლეულია შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

# 1.ველის განტოლებები თერმოდრეკადი პიეზოელექტრული კელვინ-ფოიგტის მასალებისთვის სიცარიელეებით

დავუშვათ პიეზოელექტრულ სხეულს უკავია $\overline{\Omega}$, სადაც არე $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. კვაზი-სტატიკური პირობებებიდან გამომდინარე, როდესაც მაგნიტური ველის ცვლილება მცირეა და არ გვაქვს ელექტრული ნაკადები ძირითად განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე [6, 18-19] :

მოძრაობის განტოლებები

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho \ddot{u}_i(x_1, x_2, x_3, t), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

$$H_{j,j} + H_0 + \mathcal{F} = \rho k \ddot{\varphi} \tag{1.2}$$

$$D_{j,j} = f_e, \qquad B_{j,j} = 0, \qquad \Omega \times ]0, T[ \tag{1.3}$$

კინემატიკური ფორმულები

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.4}$$

ენტროპიული ბალანსი

$$Q_{j,j} + \tilde{s} = T_0 \dot{S} \tag{1.5}$$

კონსტიტუციური დამოკიდებულებები

$$X_{ji} = X_{ij} = E_{ijkl} e_{kl} + E^*_{ijkl} \dot{e}_{kl} + \tilde{b}_{ij} \varphi + b^*_{ij} \dot{\varphi} + d_{ijk} \varphi_{,k} + d^*_{ijk} \dot{\varphi}_{,k} + p_{ijk} \chi_{,k} + p^*_{kij} \dot{\chi}_{.k} + q_{kij} \eta_{,k} + q^*_{kij} \dot{\eta}_{,k}$$
$$- \beta_{ij} \theta + M^*_{ijk} \tag{1.6}$$

$$H_j = d_{klj} e_{kl} + d^*_{klj} \dot{e}_{kl} + d_j \varphi + d^*_j \dot{\varphi} + \tilde{\alpha}_{ji} \varphi_{,i} + \alpha^*_{ji} \dot{\varphi}_{,i} - a_j \theta + \tilde{P}^*_{ij} \theta_{,i} \tag{1.7}$$

$$H_0 = -\tilde{b}_{ij} e_{ij} - \tilde{\xi} \varphi - d_j \varphi_{,i} - b^*_{ij} \dot{e}_{ij} - \xi^* \dot{\varphi} - d^*_i \dot{\varphi}_{,i} + \widetilde{m} \theta - R^*_j \theta_{,j} \tag{1.8}$$

$$D_j = p_{jkl} e_{kl} + p^*_{jkl} \dot{e}_{kl} - \zeta_{jl} \chi_{,l} - \tilde{a}_{jl} \eta_{,l} + \tilde{n}_j \theta \tag{1.9}$$

$$B_j = q_{jkl}\, e_{kl} + q^*_{jkl}\dot{e}_{kl} - \tilde{a}_{jl}\chi_{,l} - \xi_{jl}\eta_{,l} + \tilde{p}_j\theta \tag{1.10}$$

$$S = \beta_{ij}\, e_{ij} + a\theta + m\varphi + a_i\varphi_{,i} \tag{1.11}$$

$$Q_j = k_{ij}\theta_{,i} + f_{jkl}\, \dot{e}_{kl} + b_j\, \dot{\varphi} + a_{ij}\dot{\varphi}_{,i} \tag{1.12}$$

სადაც $X_{ij} \in C^1(\Omega)$ არის მაბვის ტენზორი, $\Phi_i$- მოცულობითი ძალის კომპონენტი, $k$-გაწონასწორებული ინერცია, $\rho$-სიმკვრივე, φ:= ν-$\nu_0 \in C^2(\Omega\,)$არის ფარდობითი მოცულობის ცვლილება ($\rho = \nu\gamma$, სადაც γ არის *მატრიცული სიმკვრივე*), $u_i \in C^2(\Omega)$ -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, $H_j \in C^1(\Omega)$ -გაწონასწორებული მაბვის ტენზორის კომპონენტი, $H_0$ და $\mathcal{F}$ გარე და შიგა გაწონასწორებული მოცულობითი ძალები, $\chi : \Omega \times ]0,T[ \to \mathbb{R}^1$ და $\eta : \Omega \times ]0,T[ \to \mathbb{R}^1$ ელექტრული და მაგნიტური პოტენციალები, E=-grad χ, M=- grad η, $f_e : \Omega \times ]0,T[ \to \mathbb{R}^1$-ელექტრული მუხტის სიმკვრივე, $p_{ijk}$ და $q_{ijk}$ პიეზოელექტრული და პიეზომაგნიტური კოეფიციენტები, $\zeta_{jl}$ *და* $\xi_{jl}$ დიელექტრიკული და მაგნიტური შეღწევადობის კოეფიციენტები, $D := (D_1, D_2, D_3) : \Omega \times ]0,T[ \to \mathbb{R}^3$ ელექტრული გადაადგილების ვექტორი, $B := (B_1, B_2, B_3) : \Omega \times ]0,T[ \to \mathbb{R}^3$ მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი, $\tilde{a}_{jl}$ არის წყვილკოეფიცინეტი რომელიც აკავშირებს ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს, Q -სითბოს ნაკადი, $\tilde{s}$-სითბოს წყარო, S-ენტროპიული სიმკვრივე, $\theta -$ *ტემპერატურის* ცვლილება

ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს :

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{jilk} = E_{klij},\quad E^*_{ijkl} = E^*_{jikl} = E^*_{jilk} = E^*_{klij},\ \ \tilde{b}_{ij} = \tilde{b}_{ji},\ b^*_{ij} = b^*_{ji},\ d_{ijk} = d_{jik},$$
$$d^*_{ijk} = d^*_{jik}\,,\ \ p_{jkl} = p_{jlk}\,, p^*_{jkl} = p^*_{jlk},\ , q^*_{jkl} = q^*_{jlk},\ \tilde{\alpha}_{ji} = \tilde{\alpha}_{ij},\ \alpha^*_{ji} = \alpha^*_{ij}, \tilde{P}^*_{ij} = \tilde{P}^*_{ji}, \zeta_{jl} = \zeta_{lj}, \xi_{jl} =$$
$$\xi_{lj}, \beta_{ij} = \beta_{ji}\,,\ M^*_{ijk} = M^*_{jik}\,,\ k_{ij} = k_{ji}, f_{jkl} = f_{jl\,k}, a_{ij} = a_{ji} \tag{1.13}$$

განვიხილოთ ზოგადი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი შერეული სასაზღვრო პირობებით

$$
\begin{array}{llll}
u_i = f_i \ \ \Gamma_0\text{-ზე}, & X_{ji}n_j = g_i, \ \ \Gamma_1 = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0} - \text{ზე}, & i = 1,2,3 & \\
\varphi = f^{\varphi}\ \ \Gamma_0^{\varphi} - \text{ზე}, & H_j n_j = g^{\varphi}\ \ \Gamma_1^{\varphi} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\varphi}} - \text{ზე} & i = 1,2,3 & \\
\chi = f^{\chi}\ \ \Gamma_0^{\chi} - \text{ზე}, & D_j n_j = g^{\chi}\ \ \Gamma_1^{\chi} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\chi}} - \text{ზე} & i = 1,2,3 & (1.14) \\
\eta = f^{\eta}\ \ \Gamma_0^{\eta} - \text{ზე}, & D_j n_j = g^{\eta}\ \ \Gamma_1^{\eta} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\eta}} - \text{ზე} & i = 1,2,3 & \\
\theta = f^{\theta}\ \ \Gamma_0^{\theta} - \text{ზე}, & Q_j n_j = g^{\theta}\ \ \Gamma_1^{\theta} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\theta}} - \text{ზე} & i = 1,2,3 &
\end{array}
$$

და დინამიკური ამოცანის შესაბამისი სტანდარტული საწყისი პირობები

$u(x,0)=u^0(x), \quad \dot{u}(x,0)=u^1(x), \quad \varphi(x,0)=\varphi^0(x), \quad \dot{\varphi}(x,0)=\varphi^1(x),$

$$\dot{\theta}(x,0)=\theta^1(x), \quad x\in\Omega; \tag{1.15}$$

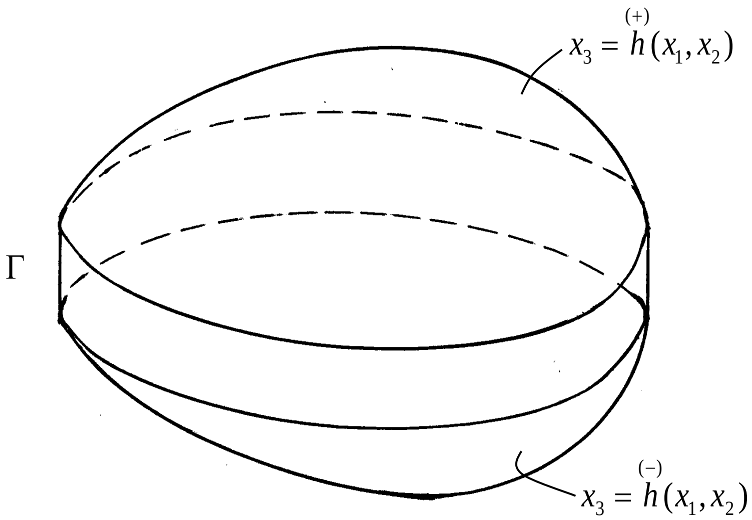
სადაც $n=(n_1,n_2,n_3)$ არის $\partial\Omega$ −ს გარე ერთეულოვანი გარე ნორმალი, $(f_1,f_2,f_3)$, $f^\varphi$ , $f^\chi$ , $f^\eta$, $f^\theta$ არის მოცემული გადაადგილების ვექტორი, ფარდობითი მოცულობა, ელექტრული და მაგნიტური პოტენციალები და ტემპერატურის ცვლილება, შესაბამისად, $(g,g_2,g_3)$, $g^\varphi$ , $g^\chi$ , $g^\eta$, $g^\theta$ არის მოცემული ძაბვის ვექტორი, გაწონასწორებული ძაბვის ნორმალის კომპონენტი, ელექტრული გადაადგილების და მაგნიტური ინდუქციის ვექტორები, მაშინ როცა $u^0$ და $u^1$ არიან საწყისი მექანიკური გადაადგილების და სიჩქარის ვექტორები, $\varphi^0$ და $\varphi^1$ საწყისი ფარდობითი მოცულობის განაწილება და მისი ხარისხი, შევნიშნოთ რომ $\Gamma_0$, $\Gamma_0^\varphi$, $\Gamma_0^\chi$, $\Gamma_0^\eta$, $\Gamma_0^\theta$ საზოგადოდ არიან ერთმანეთისგან განსხვავებულები ზემოთ მოყვანილ ამოცანაში და დამოკიდებულები ფიზიკურ ამოცანაზე, შესაძლებელია ზოგიერთი მათგანი იყოს ცარიელი.

## 2. იერარქიული მოდელის აგება. $N-$ური მიახლოება

სხეულს რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია

$$x_3 = \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) \text{ და } \quad x_3 = \overset{(-)}{h}(x_1,x_2)$$

ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან - Γ ცილინდრული ზედაპირით რომლის მსახველი ვერტიკალური $Ox_3$ ღერძის პარალელურია, ეწოდება პრიზმული გარსი




სიმეტრიულ შემთხვევაში ე.ი როცა $\overset{(-)}{h}(x_1,x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)$ *პრიზმული* გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას.

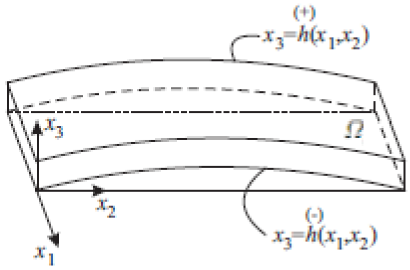
$2h(x_1,x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) \geq 0$ სიდიდეს პრიზმული გარსის სისქე ეწოდება.

პრიზმული გარსის გეგმილი $Ox_1x_2$ სიბრტყეზე ავღნიშნოთ $\omega -$*თი*, მის საზღვარს გარსის საზღვარი ეწოდება

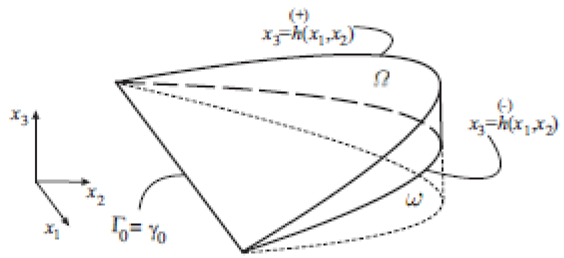
.

განვიხილოთ პრიზმული გარსი, რომელსაც უკავია $\Omega$ არე, რომლის პროექცია $x_3 = 0$ სიბრტყეზე არის $\omega$, შემდეგი პირითი ზედაპირებით [ნახაზი 1, 12, 20] :

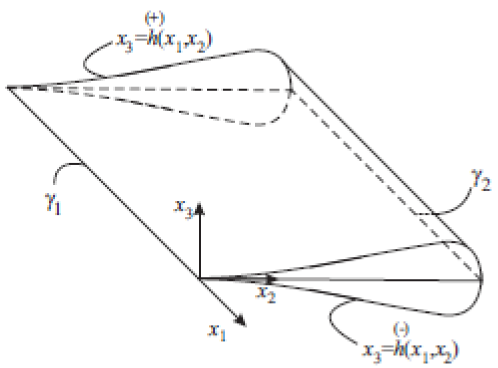
$$x_3 = \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) \in C^2(\omega), \qquad \text{და} \qquad x_3 = \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) \in C^2(\omega), \qquad (x_1,x_2) \in \omega.$$




ნახაზი 1. მუდმივი სისქის პრიზმული გარსი, $\partial\Omega$ არის ლიფშიცური საზღვარი




ნახაზი 2.  წამახვილებული პრიზმული გარსი. $\partial\Omega$ არის ლიფშიცური საზღვარი




ნახაზი 3. წამახვილებული ფირფიტა. $\partial\Omega$  არ არის ლიფშიცური საზღვარი

$$2h(x_1,x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) > 0,\ (x_1,x_2) \in \omega\ ,$$

არის პრიზული გარსის სისქე.  $\partial\Omega -$ ს ის ნაწილი, სადაც სისქე ქრება ე.ი $2h = 0$  ეწოდება წამახვილებული ნაპირი. თუ  $\partial\Omega$ წამახვილებულ ნაპირს შეიაცავს გლუვად ეწოდება ბლგავი წამახვილებული ნაპირი.

დავუშვათ $\quad 2\tilde{h}(x_1,x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1,x_2) + \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) > 0, \ (x_1,x_2) \in \omega$

სიმეტრიული პრიზმული გარსის შემთხვევაში ე.ი როცა

$$\overset{(-)}{h}(x_1,x_2) = -\overset{(+)}{h}(x_1,x_2),$$

გვაქვს

$$2\tilde{h}(x_1,x_2) = 0, \ \ (x_1,x_2) \in \omega.$$

კერძოდ, დავუშვად $\omega$ არის საკმარისად გლუვი რკალით შემოსაზღვრული არე, მდებარე $x_2 > 0$ ნახევარ სიბრტყეში. დავუშვათ სისქე

$$2h(x_1,x_2) = 2h_0 x_2^k, \qquad h_0, k = const > 0,$$

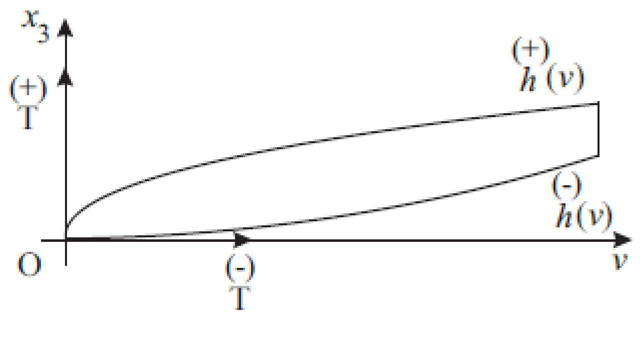
საიდანაც გვაქვს

$$\overset{(\pm)}{h}(x_1,x_2) = \overset{(\pm)}{h_0} x_2^k, \ \ \overset{(\pm)}{h_0} = const, \qquad \overset{(+)}{h_0} > \overset{(-)}{h_0}, \qquad 2h_0 := \overset{(+)}{h_0} - \overset{(-)}{h_0}.$$

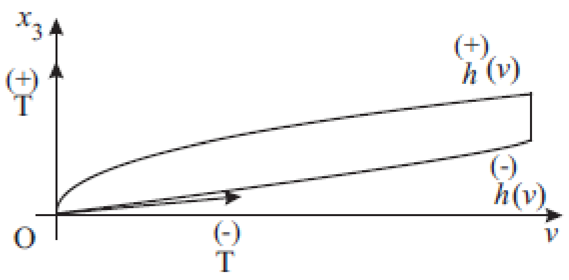
როცა $k < 1$ ამ შემთხვევაში ვამბობთ რომ გვაქვს ბლაგვი წამახვილება, ხოლო როცა $k \geq 1$ ამ შემთხვევაში ვამბობთ რომ გვაქვს მახვილი წამახვილება.

ნახაზ ($\hat{\varphi}$ არის კუთხე წამახვილებაზე $\overset{(+)}{T}$ და $\overset{(-)}{T}$ მხებებს შორის, $\nu$ არის $\partial\Omega -$ ს შიგა ნორმალი) ნაჩვენებია წამახვილებული პრიზმული გარსის დამახასიათებელი პროფილები .

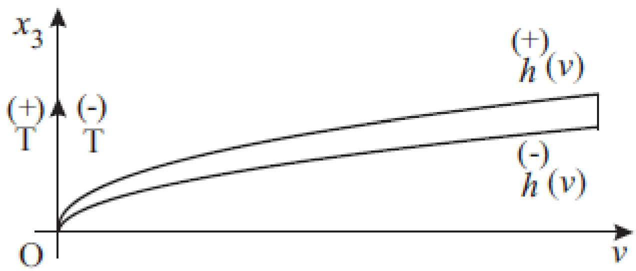
თავდაპირველად ვიხილავთ $\omega$ –სა და დადებითი სისქის ზოგად შემთხვევას. ასეთ შემთხვევაში განსახილველ პრიზმულ გარს არ აქვს წამახვილებული ნაპირი.



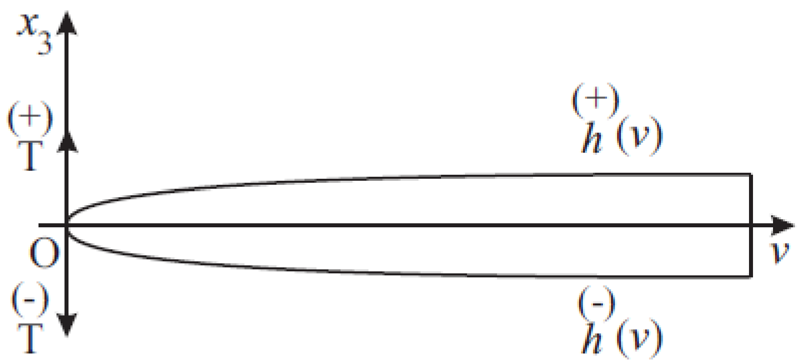

ნახაზი 4. გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$). აქვს ლიფშიცური საზღვარი



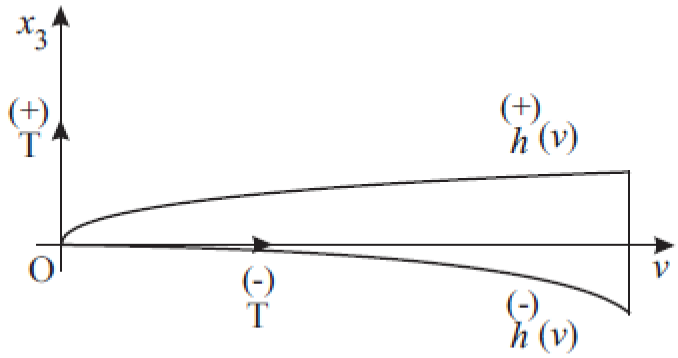

ნახაზი 5. . გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. აქვს ლიფშიცური საზღვარი



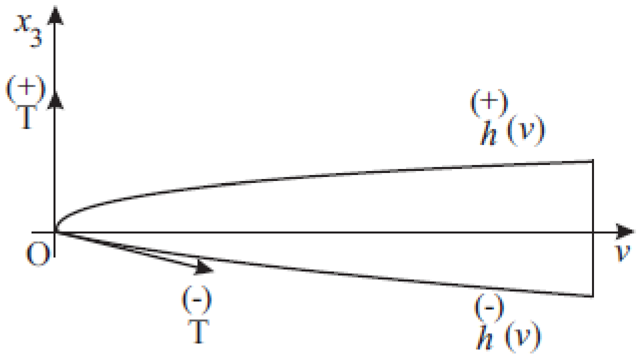

ნახაზი 6. გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} = 0$). არ აქვს ლიფშიცური საზღვარი



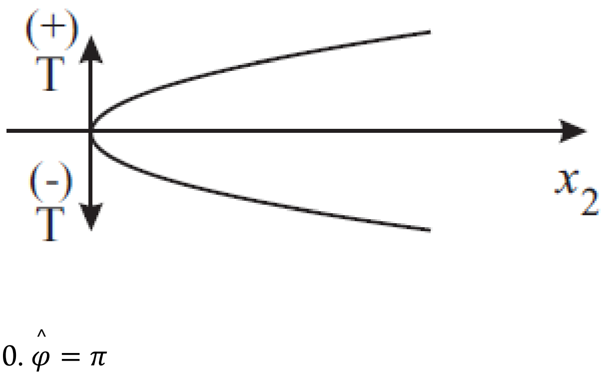

ნახაზი 7. გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} = \pi$). არ აქვს ლიფშიცური საზღვარი



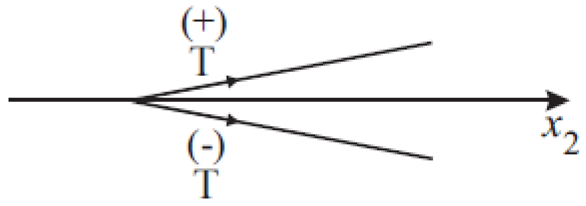

ნახაზი 8. გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$). აქვს ლიფშიცური საზღვარი



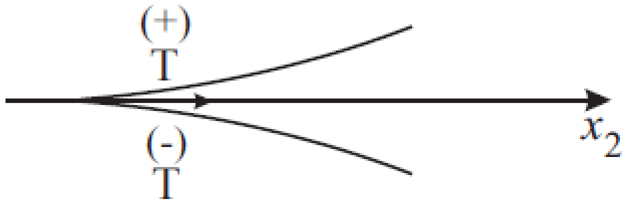

ნახაზი 9. გლუვი წამახვილებული ფირფიტა ($\hat{\varphi} \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$). აქვს ლიფშიცური საზღვარი



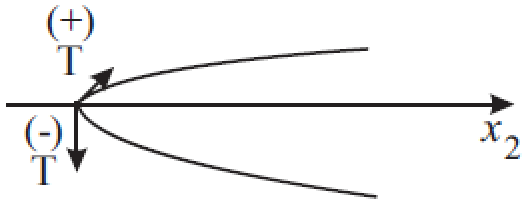

ნახაზი 10. $\hat{\varphi} = \pi$



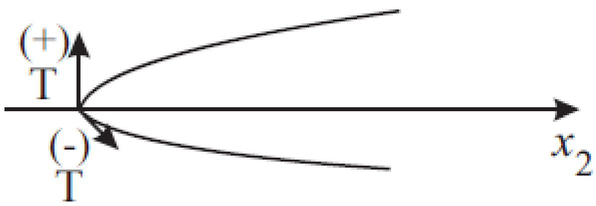

ნახაზი 11. $\hat{\varphi} \in ]0, \pi[$



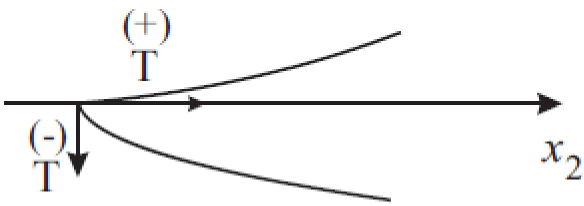

ნახაზი 12. $\hat{\varphi} = 0$



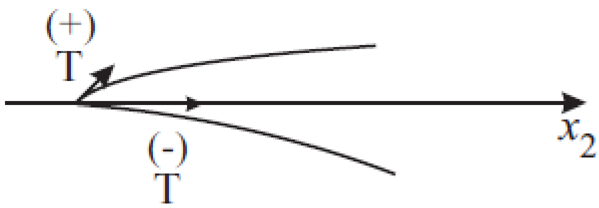

ნახაზი 13. $\frac{\pi}{2} < \hat{\varphi} < \pi$



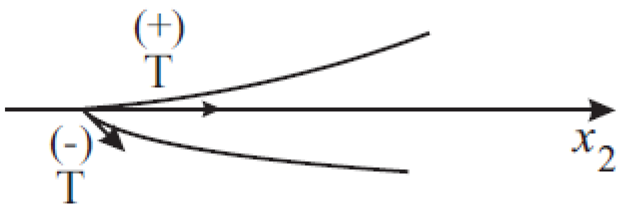

ნახაზი 14. $\frac{\pi}{2} < \hat{\varphi} < \pi$



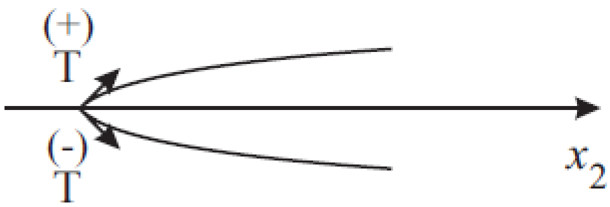
ნახაზი 15. $\hat{\varphi} = \frac{\pi}{2}$




ნახაზი 16. $0 < \hat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$




ნახაზი 17. $0 < \hat{\varphi} < \frac{\pi}{2}$




ნახაზი 18. $0 < \hat{\varphi} < \pi$

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left(\tau^2 - 1\right)^n}{d\tau^n}, \; n = 0,1,\dots ,$$

პოლინომებს, კერძოდ,

$$P_0(\tau) = 1, \; P_1(\tau) = \tau, \; P_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{2},$$

ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდებათ. ლეჟანდრის პოლინომტა სისტემა ორთოგონალურია $[-1,1]$ დეგმენტზე:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\tau)P_m(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{2.1}$$

(2.1)-დან ცხადია , რომ პოლინომთა

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\tau), \ n = 0,1,\dots ,$$

სისტემა ორთონორმირებულია.

(*)-ში მოვახდინოთ ცვლადთა

$$\tau = ax_3 - b$$

გარდაქმნა, სადაც

$$a := \frac{1}{h}, \quad b := \frac{\widetilde{h}}{h},$$

$2h := \overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}$ პრიზმული გარსის სისქეა, $2\widetilde{h} := \overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}$ . ცხადია,

$$\tau = \frac{2}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}} x_3 - \frac{\overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}}$$

და

$$\int_{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)} P_n(ax_3 - b)P_m(ax_3 - b)a dx_3 = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

საზოგადოდ,

$$\varphi_n(\tau), \ n = 0,1,2,\dots, \ \tau \in [c,d],$$

ორთონორმირებული სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივს აქვს

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(\tau)$$

სახე, სადაც

$$c_n = \int_c^d f(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau\ ,\ n = 0,1,\dots\ ,$$

ფურიეს კოეფიციენტებია.

მოცემული $f(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის r-რიგის მათემატიკური მომენტი განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$f_r(x_1, x_2) = \int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3)\ P_r(ax_3 - b)$$

სადაც $P_r$ არის $r$-რიგის ლეჟანდრის პოლინომი.

ნაწილობითი ინტეგრების და პარამეტრზე დამოკიდებული ინტეგრალის გაწარმოების წესისსა და $P_r(1) = 1,\ \ P_r(-1) = (-1)^r$ გათვალისწინებით, ადგილი აქვს შემდეგს [6] :

$$\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r(ax_3 - b)\ f_{,3}\ dx_3 = a\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r'(ax_3 - b)\ f\ dx_3 + \overset{(+)}{f} - (-1)^r \overset{(-)}{f}$$

$$\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r(ax_3 - b)\ f_{,\alpha}\ dx_3 = f_{r,\alpha} - \overset{(+)}{f}\ \overset{(+)}{h}_{,\alpha} - (-1)^r \overset{(-)}{f}\ \overset{(-)}{h}_{,\alpha} -$$

$$\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r'(ax_3 - b)\,(a_{,\alpha}x_3 - b_{,\alpha})\ f\ dx_3$$

აქედან ლეჟანდრის პოლინომების თვისებებისა და შესაბამისი გარდაქმნებით ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს :

$$\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r(ax_3 - b)\ f_{,3}\ dx_3 = -\sum_{s=r+1}^{\infty} \overset{r}{a}_{3s}\, f_s \qquad (2.2)$$

სადაც, $\overset{r}{a}_{3s} := -(2s+1)\,\frac{1-(-1)^{r+s}}{2h}$

$$\int_{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)} P_r(ax_3 - b)\ f_{,\alpha}\ dx_3 = f_{r,\alpha} + \sum_{s=r}^{\infty} \overset{r}{b}_{\alpha s}\, f_s \qquad (2.3)$$

სადაც , $\overset{r}{b}_{js} = -\overset{r}{a}_{js},\quad s > r: \quad \overset{r}{b}_{js} = 0,\ \ \mathrm{s} < \mathrm{r};$

$$\overset{r}{b}_{\alpha \underline{r}} ; = \overset{r}{a}_{\alpha \underline{r}} - \overset{r}{a}{}^{*}_{\alpha \underline{r}} = -(r+1)\,\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - \overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h}, \qquad \overset{r}{b}_{3\underline{r}} = 0;$$

სადაც $\overset{r}{a}_{\alpha \underline{r}} = r\frac{h_{,\alpha}}{h}$, $\quad \overset{r}{a}_{\alpha s} := (2s+1)\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - (-1)^{r+s}\overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h}$, $\; s \neq r$.

$\overset{r}{a}{}^{*}_{\alpha s} = \overset{r}{a}_{\alpha s}$, $\; s \neq r$, $\quad \overset{r}{a}{}^{*}_{\alpha \underline{r}} = (2r+1)\frac{h_{,\alpha}}{h}$.

$r$ –რიგის მათემატიკური მომენტი განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$\left(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}, \Phi_{ir}, H_{ir}, H_{0r}, \varphi_r, \mathcal{F}_r, D_{jr}, B_{jr}, \chi_r, \eta_r, f_{er}, \theta_r, S_r, Q_{jr}, \tilde{s}_r\right)(x_1, x_2, t)$$

$$= \int_{\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)}^{\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)} \left(u_i, X_{ij}, e_{ij}, \Phi_i, H_i, H_0, \varphi, \mathcal{F}, D_j, B_j, \chi, \eta, f_e, \theta, S, Q_j, \tilde{s}\right)(x_1, x_2, x_3, t) \times P_r(ax_3 - b)dx_3,$$

სადაც

$$P_r(ax_3 - b) \quad \left( a(x_1, x_2) = \frac{2}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}} = \frac{1}{h}, \quad b(x_1, x_2) = \frac{\overset{(+)}{h} + \overset{(-)}{h}}{\overset{(+)}{h} - \overset{(-)}{h}} = \frac{\tilde{h}}{h}\right)$$

არის $r$ –რიგის ლეჟანდრის პოლინომი.

შემდეგი ფურიე-ლეჟანდრის მწკრივი არის კრებადი [1]

$$\left(u_i, X_{ij}, e_{ij}, \Phi_i, H_i, H_0, \varphi, \mathcal{F}, D_j, B_j, \chi, \eta, f_e, \theta, S, Q_j, \tilde{s}\right)(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} a\left(r + \frac{1}{2}\right)$$
$$\times \left(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}, \Phi_{ir}, H_{ir}, H_{0r}, \varphi_r, \mathcal{F}_r, D_{jr}, B_{jr}, \chi_r, \eta_r, f_{er}, \theta_r, S_r, Q_{jr}, \tilde{s}_r\right)(x_1, x_2, t)$$
$$\times P_r(ax_3 - b)$$

(1.1)-(1.5)-ის $P_r(ax_3 - b)$ – ზე გამრავლების და ინტეგრებით $\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)$-დან $\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)$-მდე სისქის $x_3$ მიმართ, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს $\omega$-ში:

$$X_{\alpha ir,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{js} X_{jis} + \overset{r}{X}_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2}, \qquad i = 1,2,3 \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

$$H_{\alpha r,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{is} H_{is} + \overset{r}{H}_{0r} + \overset{r}{H} = \rho k \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2}, \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{2.5}$$

$$D_{\alpha r,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{is} D_{is} + \overset{r}{D} = f_{er}, \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{2.6}$$

$$B_{\alpha r,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{is} B_{is} + \overset{r}{B} = 0, \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{2.7}$$

$$Q_{\alpha r,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{is} Q_{is} + \overset{r}{Q} = T_0 \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{2.8}$$

სადაც

$$\overset{r}{X}_i = \overset{(+)}{X}_{3i} - \overset{(+)}{X}_{\alpha i,a}\overset{(+)}{h}_{,\alpha} + (-1)^r\left[-\overset{(-)}{X}_{3i} + \overset{(-)}{X}_{\alpha i,a}\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right] + \Phi_{ir}$$

$$= X_{\overset{(+)}{n_i}}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + (-1)^r X_{\overset{(+)}{n_i}}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + \Phi_{ir},\ \ i = 1,2,3$$

$$\overset{r}{H} = \overset{(+)}{H}_3 - \overset{(+)}{H}_{\alpha,a}\overset{(+)}{h}_{,\alpha} + (-1)^r\left[-\overset{(-)}{H}_3 + \overset{(-)}{H}_{\alpha}\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right] + \mathcal{F}_r$$

$$= \overset{(+)}{H}_3\overset{(+)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + (-1)^r\overset{(-)}{H}_3\overset{(-)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + \mathcal{F}_r$$

$$\overset{r}{D} = \overset{(+)}{D}_3 - \overset{(+)}{D}_{\gamma}\overset{(+)}{h}_{,\gamma} + (-1)^r\left[-\overset{(-)}{D}_3 + \overset{(-)}{D}_{\gamma}\overset{(-)}{h}_{,\gamma}\right] =$$

$$= \overset{(+)}{D}_i\overset{(+)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + (-1)^r\overset{(-)}{D}_i\overset{(-)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2}$$

$$\overset{r}{B} = \overset{(+)}{B}_3 - \overset{(+)}{B}_{\gamma}\overset{(+)}{h}_{,\gamma} + (-1)^r\left[-\overset{(-)}{B}_3 + \overset{(-)}{B}_{\gamma}\overset{(-)}{h}_{,\gamma}\right] =$$

$$= \overset{(+)}{B}_i\overset{(+)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + (-1)^r\overset{(-)}{B}_i\overset{(-)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2}$$

$$\overset{r}{Q} = \overset{(+)}{Q}_3 - \overset{(+)}{Q}_{\gamma}\overset{(+)}{h}_{,\gamma} + (-1)^r\left[-\overset{(-)}{Q}_3 + \overset{(-)}{Q}_{\gamma}\overset{(-)}{h}_{,\gamma}\right] + \tilde{s}_r =$$

$$= \overset{(+)}{Q}_i\overset{(+)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + (-1)^r\overset{(-)}{Q}_i\overset{(-)}{n}_i\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,\alpha}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right)^2} + \tilde{s}_r$$

(1.6)-დან მივიღებთ :

$$X_{ijr} = E_{ijkl}e_{klr} + E^*_{ijkl}\dot{e}_{klr} + \tilde{b}_{ij}\,\varphi_r + b^*_{ij}\dot{\varphi}_r + d_{ij\gamma}(\varphi_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\varphi_s) - d_{ij3}\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\varphi_s) +$$
$$d^*_{ij\gamma}(\dot{\varphi}_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\varphi}_s) - d^*_{ij3}\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\dot{\varphi}_s + p_{\gamma ij}\,(\chi_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\chi_s) - p_{3ij}\,\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\chi_s +$$
$$p^*_{\gamma ij}(\,\dot{\chi}_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\chi}_s) - p^*_{3ij}\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\dot{\chi}_s + q_{\gamma ij}\left(\eta_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\eta_s\right) - q_{3ij}\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\eta_s +$$
$$q^*_{\gamma ij}(\dot{\eta}_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\dot{\eta}_s) - q^*_{3ij}\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{js}\dot{\eta}_s - \beta_{ij}\,\theta_r + M^*_{ij\gamma}\,(\theta_{r,\gamma} + \textstyle\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\theta_s) -$$
$$M^*_{ij\gamma}\,\textstyle\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\theta_s$$

$X_{ijr}=\frac{1}{2}E_{ijkl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}u_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}u_{ks})\ +\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+$

$\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\ \dot{u}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{u}_{ks})+\tilde{b}_{ij}\,\varphi_r+b^{*}_{ij}\dot{\varphi}_r+d_{ij\gamma}(\varphi_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\varphi_s)-d_{ij3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\varphi_s)+$

$d^{*}_{ij\gamma}(\dot{\varphi}_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\varphi}_s)-d^{*}_{ij3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\dot{\varphi}_s+p_{\gamma ij}\,(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\chi_s)-p_{3ij}\ \sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\chi_s+$

$p^{*}_{\gamma ij}(\ \dot{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\chi}_s)-p^{*}_{3ij}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\dot{\chi}_s+q_{\gamma ij}\left(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\eta_s\right)-q_{3ij}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\eta_s+$

$q^{*}_{\gamma ij}(\dot{\eta}_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\dot{\eta}_s)-q^{*}_{3ij}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{js}\dot{\eta}_s-\beta_{ij}\,\theta_r+M^{*}_{ij\gamma}\,(\theta_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\theta_s)-$

$M^{*}_{ij\gamma}\ \sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\theta_s$

დავუშვათ : $\nu_r:=\frac{u_r}{h^{r+1}},\psi_r:=\frac{\varphi_r}{h^{r+1}},\qquad \tilde{\chi}_r:=\frac{\chi_r}{h^{r+1}},\quad \tilde{\eta}_r:=\frac{\eta_r}{h^{r+1}},\ \ \tilde{\theta}_r:=\frac{\theta_r}{h^{r+1}}$ (2.9)

(2.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ:

$X_{ijr}=\frac{1}{2}E_{ijkl}h^{r+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{ks}\nu_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\nu_{ks})\ +\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}h^{r+1}\big(\dot{\nu}_{kr,l}+$

$\dot{\nu}_{lr,k}\big)+\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}(\overset{r}{b}_{ks}\ \dot{\nu}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{\nu}_{ks})+\tilde{b}_{ij}\ h^{r+1}\psi_r+b^{*}_{ij}h^{r+1}\dot{\psi}_r+d_{ij\gamma}h^{r+1}\psi_{r,\gamma}+$

$d_{ijk}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{ks}\psi_s+d^{*}_{ij\gamma}h^{r+1}\dot{\psi}_{r,\gamma}+d^{*}_{ijk}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\psi}_s+p_{\gamma ij}\ h^{r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+$

$p_{kij}\ \sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{ks}\widetilde{\chi_s}+p^{*}_{\gamma ij}h^{r+1}\dot{\tilde{\chi}}_{r,\gamma}+p^{*}_{kij}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{ks}\dot{\tilde{\chi}}_s)+q_{\gamma ij}h^{r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+$

$q_{ijk}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{ks}\tilde{\eta}_s+\ q^{*}_{\gamma ij}h^{r+1}\dot{\tilde{\eta}}_{r,\gamma}+q^{*}_{kij}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{ks}\dot{\tilde{\eta}}_s-\beta_{ij}h^{r+1}\tilde{\theta}_r+\ M^{*}_{ij\gamma}h^{r+1}\tilde{\theta}_{r.\gamma}+$

$M^{*}_{ijk}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\overset{r}{b}_{ks}\,\tilde{\theta}_s$ (2.10)

(1.7)-დან მივიღებთ:

$H_{jr}=\frac{1}{2}d_{klj}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}d_{klj}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}u_{ks})\ +\frac{1}{2}d^{*}_{klj}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+$

$\frac{1}{2}d^{*}_{klj}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\ \dot{u}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{u}_{ks})+d_j\varphi_r+d^{*}_j\dot{\varphi}_r+\tilde{\alpha}_{jk}\left(\varphi_{r,k}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\varphi_s\right)+\alpha^{*}_{kj}\Big(\dot{\varphi}_{r,k}+$

$\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\varphi}_s\Big)-\alpha_j\theta_r+\tilde{P}^{*}_{jk}(\theta_{r,k}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\theta_s$

(2.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ:

$H_{jr}=\frac{1}{2}d_{klj}h^{r+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}d_{klj}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{ks}\nu_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\nu_{ks})\ +\frac{1}{2}d^{*}_{klj}h^{r+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+$

$\frac{1}{2}d^{*}_{klj}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}(\overset{r}{b}_{ks}\ \dot{\nu}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{\nu}_{ks})+d_jh^{r+1}\psi_r+d^{*}_jh^{r+1}\dot{\psi}_r+\tilde{\alpha}_{ji}\Big(h^{r+1}\psi_{r,i}+$

$\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\psi_s\Big)+\alpha^{*}_{ji}\ \left(h^{r+1}\dot{\psi}_{r,i}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\dot{\psi}_s\right)-\alpha_jh^{r+1}\tilde{\theta}_r+\tilde{P}^{*}_{ji}(h^{r+1}\tilde{\theta}_{r,i}+$

$\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\tilde{\theta}_s)$ (2.11)

(1.8)-დან მივიღებთ:

$$H_{0r} = -d_i\left(\varphi_{r,i} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\varphi_s\right) - \tilde{b}_{ij}e_{ijr} - \tilde{\xi}\varphi_r - b_{ij}^{*}\left(\dot{\varphi}_{r,i} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{\varphi}_s\right) - b_{ij}^{*}\dot{e}_{ijr} - \xi^{*}\dot{\varphi}_r + \widetilde{m}\theta_r - R_j^{*}(\theta_{r,j} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\theta_s)$$

$$H_{0r} = -d_i\left(\varphi_{r,i} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\varphi_s\right) - \tilde{b}_{ij}\left(\frac{1}{2}(u_{ir,j} + u_{jr,i}) + \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,u_{js} + \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,u_{is})\right) - \tilde{\xi}\varphi_r - b_{ij}^{*}\left(\frac{1}{2}\left(\dot{u}_{ir,j} + \dot{u}_{jr,i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{u}_{js} + \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\dot{u}_{is}\right) - \xi^{*}\dot{\varphi}_r + \widetilde{m}\theta_r - R_j^{*}(\theta_{r,j} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\theta_s)$$

(2.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$H_{0r} = -d_i\left(h^{r+1}\psi_{r,i} + \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1}\overset{r}{b}_{is}\psi_s\right) - \tilde{b}_{ij}\left(\tfrac{1}{2}h^{r+1}(\nu_{ir,j} + \nu_{jr,i}) + \tfrac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{is}\nu_{js} + \overset{r}{b}_{js}\nu_{is})\right) - \tilde{\xi}h^{r+1}\psi_r - b_{ij}^{*}\left(\tfrac{1}{2}h^{r+1}\left(\dot{\nu}_{ir,j} + \dot{\nu}_{jr,i}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{is}\dot{\nu}_{js} + \overset{r}{b}_{js}\dot{\nu}_{is})\right) - \xi^{*}h^{r+1}\dot{\psi}_r + \widetilde{m}h^{r+1}\tilde{\theta}_r - R_j^{*}(h^{r+1}\tilde{\theta}_{r,j} + \sum_{s=r+1}^{\infty} h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{js}\tilde{\theta}_s) \qquad (2.12)$$

(1.9)-დან მივიღებთ:

$$D_{jr} = p_{jkl}\,e_{kl} + p_{jkl}^{*}\dot{e}_{kl} - \zeta_{j\gamma}\left(\chi_{r,\gamma} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_s\right) + \zeta_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{\gamma s}\,\chi_s - \tilde{a}_{j\gamma}\left(\eta_{r,\gamma} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_s\right) + \tilde{a}_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{\gamma s}\,\eta_s + \tilde{n}_j\theta_r$$

$$D_{jr} = \tfrac{1}{2}p_{jkl}\left(u_{kr,l} + u_{lr,k}\right) + \tfrac{1}{2}p_{jkl}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls} + \overset{r}{b}_{ls}u_{ks}) + \tfrac{1}{2}p_{jkl}^{*}\left(\dot{u}_{kr,l} + \dot{u}_{lr,k}\right) + \tfrac{1}{2}p_{jkl}^{*}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\;\dot{u}_{ls} + \overset{r}{b}_{ls}\dot{u}_{ks}) - \zeta_{j\gamma}\left(\chi_{r,\gamma} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_s\right) + \zeta_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_s - \tilde{a}_{j\gamma}\left(\eta_{r,\gamma} + \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_s\right) + \tilde{a}_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_s + \tilde{n}_j\theta_r$$

(2.9)-ს გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$D_{jr}=\frac{1}{2}p_{jkl}h^{r+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}p_{jkl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{ks}\nu_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\nu_{ks})\;+\frac{1}{2}p_{jkl}^{*}h^{r+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+$$

$$\frac{1}{2}p_{jkl}^{*}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}(\overset{r}{b}_{ks}\;\dot{\nu}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{\nu}_{ks})-\zeta_{j\gamma}\left(h^{r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\chi}_{s}\right)+$$

$$\zeta_{j3}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\chi}_{s}-\tilde{a}_{j\gamma}\left(h^{r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\eta}_{s}\right)+\tilde{a}_{j3}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\eta}_{s}+\tilde{n}_{j}h^{r+1}\tilde{\theta}_{r}\;,$$

(2.13)

(1.10)-დან მივიღებთ:

$$B_{jr}=\frac{1}{2}q_{jkl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{jkl}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}u_{ks})\;+\frac{1}{2}q_{jkl}^{*}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+$$

$$\frac{1}{2}q_{jkl}^{*}\sum_{s=r}^{\infty}(\overset{r}{b}_{ks}\;\dot{u}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{u}_{ks})-\tilde{a}_{j\gamma}\left(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_{s}\right)+\tilde{a}_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_{s}-\xi_{j\gamma}\left(\eta_{r,\gamma}+\right.$$

$$\left.\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_{s}\right)+\xi_{j3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_{s}+\tilde{p}_{j}\theta_{r}$$

(2.9)-ს  გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$B_{jr}=\frac{1}{2}q_{jkl}h^{r+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{jkl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{ks}\nu_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\nu_{ks})\;+\frac{1}{2}q_{jkl}^{*}h^{r+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+$$

$$\frac{1}{2}q_{jkl}^{*}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}(\overset{r}{b}_{ks}\;\dot{\nu}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{\nu}_{ks})-\tilde{a}_{j\gamma}\left(h^{r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\chi}_{s}\right)+$$

$$\tilde{a}_{j3}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\chi}_{s}-\xi_{j\gamma}\left(h^{r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\eta}_{s}\right)+\xi_{j3}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\eta}_{s}+\tilde{p}_{j}h^{r+1}\tilde{\theta}_{r}$$

(2.14)

(1.11)-დან მივიღებთ;

$$S_{r}=\beta_{ij}\,(\frac{1}{2}(u_{ir,j}+u_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,u_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,u_{is})+a\theta_{r}+m\varphi_{r}+a_{i}(\varphi_{r,i}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\varphi_{s})$$

(2.9)-ს  გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S_{r}=\beta_{ij}\,\left(\frac{1}{2}h^{r+1}(\nu_{ir,j}+\nu_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,(\overset{r}{b}_{is}\nu_{js}+\overset{r}{b}_{js}\nu_{is})\right)+ah^{r+1}\tilde{\theta}_{r}+mh^{r+1}\psi_{r}+$$

$$a_{i}\,\left(h^{r+1}\psi_{r,i}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\psi_{s}\,\right),\qquad(2.15)$$

ანალოგიურად (1.12)-სთვის გვექნება

$$Q_{jr}=k_{ij}\,\left(h^{r+1}\tilde{\theta}_{r,i}+\;\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\tilde{\theta}_{s}\right)+\frac{1}{2}f_{jkl}\,h^{r+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+$$

$$\frac{1}{2}f_{jkl}\;\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}(\overset{r}{b}_{ks}\;\dot{\nu}_{ls}+\overset{r}{b}_{ls}\dot{\nu}_{ks})+b_{j}\,h^{r+1}\dot{\psi}_{r}+a_{ij}(h^{r+1}\dot{\psi}_{r,i}+\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{s+1}\,\overset{r}{b}_{is}\dot{\psi}_{s}\,)\qquad(2.16)$$

უკანასკნელი განტოლებების შესაბამისად (2.4)-(2.8)-ში შეტანით მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta}u_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l}u_{lr,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ik\delta}\dot{u}_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha i\gamma l}\dot{u}_{kr,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(\tilde{b}_{\alpha i}\,\varphi_{r}\right)_{,\alpha}+(b^{*}_{\alpha i}\dot{\varphi}_{r})_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}\varphi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\varphi_{s}\right)_{,\alpha}-\left(d_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\varphi_{s}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\,\dot{\varphi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\varphi}_{s}\right)_{,\alpha}-\left(d^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\varphi}_{s}\right)_{,\alpha}+\left(p_{\gamma\alpha i}\,\chi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(p_{\gamma\alpha i}\,\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\chi_{s}\right)_{,\alpha}-\left(p_{3\alpha i}\,\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\chi_{s}\right)_{,\alpha}+\left(p^{*}_{\gamma\alpha i}\dot{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+c+\left(q_{\gamma\alpha i}\,\eta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(q_{\gamma\alpha i}\,\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\eta_{s}\right)_{,\alpha}-\left(p_{3\alpha i}\,\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\eta_{s}\right)_{,\alpha}+\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}\dot{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\eta}_{s}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(q^{*}_{3\alpha i}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\eta}_{s}\right)_{,\alpha}-(\beta_{\alpha i}\theta_{r})_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}\theta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\theta_{s}\right)_{,\alpha}-M^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\theta_{s}+$$

$$\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\tfrac{1}{2}E_{ijkl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'})\ +\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+$$

$$\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})+\tilde{b}_{ij}\,\varphi_{r}+b^{*}_{ij}\dot{\varphi}_{r}+d_{ij\gamma}(\varphi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\varphi_{s'})-$$

$$d_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\varphi_{s'})+d^{*}_{ij\gamma}(\dot{\varphi}_{r,\gamma}+\sum_{s'=r'}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\varphi}_{s'})-d^{*}_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\varphi}_{s'}+p_{\gamma ij}\,(\chi_{r,\gamma}+$$

$$\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\chi_{s'})-p_{3ij}\,\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\chi_{s'}+p^{*}_{\gamma ij}(\,\dot{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\chi}_{s'})-$$

$$p^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\chi}_{s'}+q_{\gamma ij}\left(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\eta_{s'}\right)-q_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\eta_{s'}+\ q^{*}_{\gamma ij}(\dot{\eta}_{r,\gamma}+$$

$$\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\dot{\eta}_{s'})-q^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{js'}\dot{\eta}_{s'}-\beta_{ij}\,\theta_{r}+M^{*}_{ij\gamma}\,(\theta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\theta_{s'})-$$

$$M^{*}_{ij3}\ \sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\theta_{s'}\ ]+\overset{r}{X}_{i}=\rho\,\frac{\partial^{2}u_{ir}}{\partial t^{2}}$$

$$\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}u_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}u_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\right)_{,\alpha}+(d_{\alpha}\,\varphi_{r})_{,\alpha}+$$

$$(d^{*}_{\alpha}\,\dot{\varphi}_{r})_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}\,\varphi_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\varphi_{s}\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha k}\,\dot{\varphi}_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\varphi}_{s}\right)_{,\alpha}-(a_{\alpha}\,\theta_{r})_{,\alpha}+$$

$$\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha k}\,\theta_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\theta_{s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\tfrac{1}{2}d_{klj}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}d_{klj}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks}\,u_{ls}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'})$$

$$+\frac{1}{2}d^{*}_{klj}\left(\dot{u}_{ks,l}+\dot{u}_{ls,k}\right)+\frac{1}{2}d^{*}_{klj}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})+d_{j}\varphi_{s}+d^{*}_{j}\dot{\varphi}_{s}+\tilde{\alpha}_{jk}\left(\varphi_{s,k}+\right.$$

$$\left.\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks'}\,\varphi_{s'}\right)+\alpha^{*}_{kj}\left(\dot{\varphi}_{s,k}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\varphi}_{s'}\right)-\alpha_{j}\theta_{s}+\tilde{P}^{*}_{jk}\left(\theta_{r,k}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks}\,\theta_{s}\right]-d_{i}\left(\varphi_{r,i}+\right.$$

$$\left.\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\varphi_{s}\right)-\tilde{b}_{ij}\left(\frac{1}{2}(u_{ir,j}+u_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,u_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,u_{is})\right)-\tilde{\xi}\varphi_{r}-b^{*}_{ij}\left(\frac{1}{2}(\dot{u}_{ir,j}+\right.$$

$$\left.\dot{u}_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{u}_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\dot{u}_{is}\right)-\xi^{*}\dot{\varphi}_{r}+\widetilde{m}\theta_{r}-R^{*}_{j}\left(\theta_{r,j}+\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\theta_{s}\right)+\overset{r}{H}=\rho k\,\frac{\partial^{2}\varphi_{r}}{\partial t^{2}}$$

$$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}u_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}u_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha kl}\dot{u}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha kl}\dot{u}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\right)_{,\alpha}-\left(\zeta_{\alpha\gamma}\chi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(\zeta_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_{s}\right)_{,\alpha}+\left(\zeta_{\alpha 3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_{s}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\eta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_{s}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_{s}\right)_{,\alpha}+(\tilde{n}_{\alpha}\theta_{r})_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}p_{ikl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}p_{ikl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'})$$

$$+\frac{1}{2}p^{*}_{ikl}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}p^{*}_{ikl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})-\zeta_{i\gamma}\left(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\chi_{s'}\right)+$$

$$\zeta_{i3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\chi_{s'}-\tilde{a}_{i\gamma}\left(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\eta_{s'}\right)+\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\eta_{s'}+\tilde{n}_{i}\theta_{r}]+\overset{r}{D}=f_{er},$$

$$\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}u_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}u_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha kl}\dot{u}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha kl}\dot{u}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\chi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_{s}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_{s}\right)_{,\alpha}-\left(\xi_{\alpha\gamma}\eta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-\left(\xi_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_{s}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(\xi_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_{s}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}_{\alpha}\theta_{r}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}q_{ikl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls}u_{ks'})$$

$$+\frac{1}{2}q^{*}_{ikl}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q^{*}_{ikl}\sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})-\tilde{a}_{i\gamma}\left(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\chi_{s'}\right)+$$

$$\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\chi_{s'}-\xi_{i\gamma}\left(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\eta_{s'}\right)+\xi_{i3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\eta_{s'}+\tilde{p}_{i}\theta_{r}+\overset{r}{B}=0,$$

$$\left(k_{\alpha k}\ \theta_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(k_{\alpha k}\ \sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\theta_{s}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\right)_{,\alpha}+(b^{*}_{\alpha}\,\dot{\varphi}_{r})_{,\alpha}+\left(a_{\alpha k}\ \dot{\varphi}_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(a_{\alpha k}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\varphi}_{s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[k_{ij}\ \Big(\theta_{s,i}+$$

$$\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{is'}\theta_{s'}\Big)+\frac{1}{2}f_{jkl}\left(\dot{u}_{ks,l}+\dot{u}_{ls,k}\right)+\frac{1}{2}f_{jkl}\ \sum_{s'=s}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})+b_{j}\,\dot{\varphi}_{s}+a_{ij}(\dot{\varphi}_{s,i}+$$

$$\sum_{s'=s}^{\infty}\overset{s}{b}_{is}\dot{\varphi}_{s}\ )]+\overset{r}{Q}=T_{0}\,\frac{\partial s_{r}}{\partial t}$$

თუ დავუშვათ N-ზე მეტი რიგის მომენტი ნულია, r=0,1,..,N , და განვიხილავთ პირველ N+1 (r=0,1,..,N ) განტოლებას თითოეული $u_{ir}$, $i=1,2,3$ , $\varphi_r$, $\chi_r$, $\eta_r$, $\theta_r$-თვის, მივიღებთ სასრულ განტოლებათა სისტემას $u_{ir}$, $i=1,2,3$ , $\varphi_r$, $\chi_r$, $\eta_r$, $\theta_r$-ის მიმართ.

მასასადამე  მივიღებთ N-ური რიგის მიახლოებას, 7N+7 განტოლებით და 7N+7 უცნობით (უხეშად რომ ვთქვათ $\overset{N}{u}_{ir}, \overset{N}{\varphi}_r, \overset{N}{\chi}_r, \overset{N}{\chi}_r, \overset{N}{\eta}_r, \overset{N}{\theta}_r$, მიახლოებითი მნიშვნელობებია $u_{ir}$, $i = 1,2,3$ , $\varphi_r$, $\chi_r, \eta_r, \theta_r$-ის ).

გადავწეროთ უკანსაკნელი განტოლებები N-ურ მიახლოებაში:

$$\tfrac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta}u_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l}u_{lr,\gamma}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}u_{ls}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\tfrac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ik\delta}\dot{u}_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha i\gamma l}\dot{u}_{kr,\gamma}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}u_{ls}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(\tilde{b}_{\alpha i}\,\varphi_r\right)_{,\alpha}+(b^{*}_{\alpha i}\dot{\varphi}_r)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}\varphi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\varphi_s\right)_{,\alpha}-\left(d_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\varphi_s\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\,\dot{\varphi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\varphi}_s\right)_{,\alpha}-\left(d^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\varphi}_s\right)_{,\alpha}+\left(p_{\gamma\alpha i}\,\chi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(p_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\chi_s\right)_{,\alpha}-\left(p_{3\alpha i}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\chi_s\right)_{,\alpha}+\left(p^{*}_{\gamma\alpha i}\dot{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+c+\left(q_{\gamma\alpha i}\,\eta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(q_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\eta_s\right)_{,\alpha}-\left(p_{3\alpha i}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\eta_s\right)_{,\alpha}+\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}\dot{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\eta}_s\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(q^{*}_{3\alpha i}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\eta}_s\right)_{,\alpha}-(\beta_{\alpha i}\theta_r)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}\theta_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\theta_s\right)_{,\alpha}-M^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\theta_s+$$

$$\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\Big[\tfrac{1}{2}E_{ijkl}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\tfrac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s'=s}^{N}\Big(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'}\Big)+\tfrac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\left(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k}\right)+$$

$$\tfrac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})+\tilde{b}_{ij}\,\varphi_r+b^{*}_{ij}\dot{\varphi}_r+d_{ij\gamma}(\varphi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\varphi_{s'})-$$

$$d_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\varphi_{s'})+d^{*}_{ij\gamma}(\dot{\varphi}_{r,\gamma}+\sum_{s'=r'}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\varphi}_{s'})-d^{*}_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\varphi}_{s'}+p_{\gamma ij}\,(\chi_{r,\gamma}+$$

$$\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\chi_{s'})-p_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\chi_{s'}+p^{*}_{\gamma ij}(\,\dot{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\chi}_{s'})-$$

$$p^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\chi}_{s'}+q_{\gamma ij}\left(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\eta_{s'}\right)-q_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\eta_{s'}+\;q^{*}_{\gamma ij}(\dot{\eta}_{r,\gamma}+$$

$$\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\dot{\eta}_{s'})-q^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{js'}\dot{\eta}_{s'}-\beta_{ij}\,\theta_r+M^{*}_{ij\gamma}\,(\theta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\theta_{s'})-$$

$$M^{*}_{ij3}\,\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\theta_{s'}\;\Big]+\overset{r}{X}_i=\rho\,\frac{\partial^2 u_{ir}}{\partial t^2}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}u_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}u_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}u_{ls}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}u_{ks}\right)_{,\alpha}+$$

$$\tfrac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\dot{u}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\right)_{,\alpha}+\tfrac{1}{2}\left(d^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\right)_{,\alpha}+(d_{\alpha}\,\varphi_r)_{,\alpha}+$$

$$(d^{*}_{\alpha}\,\dot{\varphi}_r)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}\,\varphi_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\varphi_s\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha k}\,\dot{\varphi}_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\varphi}_s\right)_{,\alpha}-(a_{\alpha}\,\theta_r)_{,\alpha}+$$

$$\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha k}\,\theta_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha k}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\theta_s\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\tfrac{1}{2}d_{klj}\left(u_{kr,l}+u_{lr,k}\right)+\tfrac{1}{2}d_{klj}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks}\,u_{ls}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'})$$

$+\frac{1}{2}d^*_{klj}(\dot{u}_{ks,l}+\dot{u}_{ls,k})+\frac{1}{2}d^*_{klj}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})+d_j\varphi_s+d^*_j\dot{\varphi}_s+\tilde{\alpha}_{jk}\Big(\varphi_{s,k}+$
$\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{ks'}\,\varphi_{s'}\Big)+\alpha^*_{kj}\Big(\dot{\varphi}_{s,k}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\varphi}_{s'}\Big)-\alpha_j\theta_s+\tilde{P}^*_{jk}\Big(\theta_{r,k}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{ks}\,\theta_s\Big]-d_i\Big(\varphi_{r,i}+$
$\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,\varphi_s\Big)-\tilde{b}_{ij}\Big(\frac{1}{2}(u_{ir,j}+u_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,u_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,u_{is})\Big)-\tilde{\xi}\varphi_r-b^*_{ij}\Big(\frac{1}{2}(\dot{u}_{ir,j}+$
$\dot{u}_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{u}_{js}+\frac{1}{2}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,\dot{u}_{is}\Big)-\xi^*\dot{\varphi}_r+\widetilde{m}\theta_r-R^*_j\Big(\theta_{r,j}+\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,\theta_s\Big)+\overset{r}{H}=\rho k\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial t^2}$

$\frac{1}{2}(p_{\alpha kl}u_{kr,l})_{,\alpha}+\frac{1}{2}(p_{\alpha kl}u_{lr,k})_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\Big)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\Big)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}(p^*_{\alpha kl}\dot{u}_{kr,l})_{,\alpha}+\frac{1}{2}(p^*_{\alpha kl}\dot{u}_{lr,k})_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(p^*_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\Big)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(p^*_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\Big)_{,\alpha}-(\zeta_{\alpha\gamma}\chi_{r,\gamma})_{,\alpha}-$
$\Big(\zeta_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_s\Big)_{,\alpha}+\Big(\zeta_{\alpha 3}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_s\Big)_{,\alpha}-(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\eta_{r,\gamma})_{,\alpha}-\Big(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_s\Big)_{,\alpha}+$
$\Big(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_s\Big)_{,\alpha}+(\tilde{n}_\alpha\theta_r)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}p_{ikl}(u_{kr,l}+u_{lr,k})+\frac{1}{2}p_{ikl}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}u_{ks'})$
$+\frac{1}{2}p^*_{ikl}(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k})+\frac{1}{2}p^*_{ikl}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})-\zeta_{i\gamma}\Big(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\chi_{s'}\Big)+$
$\zeta_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\chi_{s'}-\tilde{a}_{i\gamma}\Big(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\eta_{s'}\Big)+\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\eta_{s'}+\tilde{n}_i\theta_r]+\overset{r}{D}=f_{er},$

$\frac{1}{2}(q_{\alpha kl}u_{kr,l})_{,\alpha}+\frac{1}{2}(q_{\alpha kl}u_{lr,k})_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(p_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\Big)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(q_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\Big)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}(q^*_{\alpha kl}\dot{u}_{kr,l})_{,\alpha}+\frac{1}{2}(q^*_{\alpha kl}\dot{u}_{lr,k})_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(q^*_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,u_{ls}\Big)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(q^*_{\alpha kl}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,u_{ks}\Big)_{,\alpha}-(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\chi_{r,\gamma})_{,\alpha}-$
$\Big(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\chi_s\Big)_{,\alpha}+\Big(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\chi_s\Big)_{,\alpha}-(\xi_{\alpha\gamma}\eta_{r,\gamma})_{,\alpha}-\Big(\xi_{\alpha\gamma}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\eta_s\Big)_{,\alpha}+$
$\Big(\xi_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\eta_s\Big)_{,\alpha}+(\tilde{P}_\alpha\theta_r)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}q_{ikl}(u_{kr,l}+u_{lr,k})+\frac{1}{2}q_{ikl}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,u_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls}u_{ks'})$
$+\frac{1}{2}q^*_{ikl}(\dot{u}_{kr,l}+\dot{u}_{lr,k})+\frac{1}{2}q^*_{ikl}\sum_{s'=s}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{u}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'})-\tilde{a}_{i\gamma}\Big(\chi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\chi_{s'}\Big)+$
$\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\chi_{s'}-\xi_{i\gamma}\Big(\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\eta_{s'}\Big)+\xi_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\eta_{s'}+\tilde{p}_i\theta_r+\overset{r}{B}=0$

$(k_{\alpha k}\ \theta_{r,k})_{,\alpha}+\Big(k_{\alpha k}\ \sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\theta_s\Big)_{,\alpha}+\frac{1}{2}(f^*_{kl\alpha}\dot{u}_{kr,l})_{,\alpha}+\frac{1}{2}(f^*_{kl\alpha}\dot{u}_{lr,k})_{,\alpha}+\frac{1}{2}\Big(f^*_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{u}_{ls}\Big)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}\Big(f^*_{kl\alpha}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{u}_{ks}\Big)_{,\alpha}+(b^*_\alpha\ \dot{\varphi}_r)_{,\alpha}+(a_{\alpha k}\ \dot{\varphi}_{r,k})_{,\alpha}+\Big(a_{\alpha k}\sum_{s=r}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\varphi}_s\Big)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[k_{ij}\ \Big(\theta_{s,i}+$

$\sum_{s'=s}^{N} \overset{s}{b}_{is'}\theta_{s'}\Big) + \frac{1}{2} f_{jkl} \left(\dot{u}_{ks,l} + \dot{u}_{ls,k}\right) + \frac{1}{2} f_{jkl} \sum_{s'=s}^{N} (\overset{s}{b}_{ks'}\, \dot{u}_{ls'} + \overset{s}{b}_{ls'}\dot{u}_{ks'}) + b_j\, \dot{\varphi}_s + a_{ij}(\dot{\varphi}_{s,i} +$
$\sum_{s'=s}^{N} \overset{s}{b}_{is}\dot{\varphi}_s\, )] + \overset{r}{Q} = T_0 \frac{\partial S}{\partial t}$

სასაზღვრო პირობებს და საწყის პირობებს მარტივად მივიღებთ (1.14) და (1.15) პირობებიდან მას შემდეგ რაც მათ გავამრავლებთ $P_r(ax_3 - b)$ –ზე და ვაინტეგრებთ $\overset{(-)}{h}(x_1, x_2)$-დან $\overset{(+)}{h}(x_1, x_2)$ –მდე $x_3$ ცვლადით

$u_{ir} = f_{ir}$ $\Gamma_0$-ზე, $X_{jir}n_j = g_{ir}$ $\Gamma_1 = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0}$ – ზე, $i = 1,2,3$

$\varphi_r = f_r^{\varphi}$ $\Gamma_0^{\varphi}$ – ზე, $H_{jr}n_j = g_r^{\varphi}$ $\Gamma_1^{\varphi} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\varphi}}$ – ზე, $i = 1,2,3$

$\chi_r = f_r^{\chi}$ $\Gamma_0^{\chi}$ – ზე, $D_{jr}n_j = g_r^{\chi}$ $\Gamma_1^{\chi} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\chi}}$ – ზე, $i = 1,2,3$

$\eta_r = f_r^{\eta}$ $\Gamma_0^{\eta}$ – ზე, $D_{jr}n_j = g_r^{\eta}$ $\Gamma_1^{\eta} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\eta}}$ – ზე, $i = 1,2,3$

$\theta_r = f_r^{\theta}$ $\Gamma_0^{\theta}$ – ზე, $Q_{jr}n_j = g_r^{\theta}$ $\Gamma_1^{\theta} = \partial\Omega\backslash\overline{\Gamma_0^{\theta}}$ – ზე, $i = 1,2,3$

და დინამიკის ამოცანის შესაბამისი სტანდარტული სწაყისი პირობები

$u_r(x,0) = u_r^0(x)$, $\dot{u}_r(x,0) = u_r^1(x)$, $\varphi_r(x,0) = \varphi_r^0(x)$, $\dot{\varphi}_r(x,0) = \varphi_r^1(x)$, $\dot{\theta}_r(x,0) =$
$\theta_r^1(x)$, $x \in \Omega$

გავამრავლოთ (2.4) განტოლება $h^r$-ზე და გავითვალისწინოთ $\overset{r}{a}_{\alpha\underline{r}} = rh^{-1}h_{,\alpha}$ , მივიღებთ

$$(h^r X_{\alpha ir})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{js} X_{jis} + h^r \overset{r}{X}_i = h^r \rho \frac{\partial^2 h^{r+1} u_{ir}}{\partial t^2}, \tag{2.17}$$

$$(h^r H_{\alpha r})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{js} H_{is} + h^r \overset{r}{H}_{0r} + h^r \overset{r}{H} = h^r \rho k \frac{\partial^2 h^{r+1} \varphi_r}{\partial t^2}, \tag{2.18}$$

$$(h^r D_{\alpha r})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{js} D_{is} + h^r \overset{r}{D} = h^r f_{er}, \tag{2.19}$$

$$(h^r B_{\alpha r})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{js} B_{is} + h^r \overset{r}{B} = 0, \tag{2.20}$$

$$(h^r Q_{\alpha r})_{,\alpha} + h^r \sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{js} Q_{is} + h^r \overset{r}{Q} = h^r T_0 \frac{\partial h^{r+1} S}{\partial t}, \tag{2.21}$$

(2.10)- (2.16) განტოლებების შესაბამისად (2.17)-(2.21)-ში შეტანით და (2.9)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ :

$$\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta}h^{2r+1}\nu_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l}h^{2r+1}\nu_{lr,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{r+s+1}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ikl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{r+s+1}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ik\delta}h^{2r+1}\dot{\nu}_{kr,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha i\gamma l}h^{2r+1}\dot{\nu}_{kr,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{r+s+1}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\nu}_{ls}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ikl}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{r+s+1}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{\nu}_{ks}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{b}_{\alpha i}h^{2r+1}\,\psi_{r}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(b^{*}_{\alpha i}h^{2r+1}\dot{\psi}_{r}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}h^{2r+1}\psi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha ik}\sum_{s=r+1}^{\infty}h^{r+s+1}\overset{r}{b}_{ks}\,\psi_{s}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(d_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\psi_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\,h^{2r+1}\dot{\psi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d^{*}_{\alpha ik}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\psi}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(d^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\psi}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(p_{\gamma\alpha i}\,h^{2r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(p_{\gamma\alpha i}\,\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\chi}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(p_{3\alpha i}\,\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\chi}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(p^{*}_{\gamma\alpha i}h^{2r+1}\dot{\tilde{\chi}}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(p^{*}_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\tilde{\chi}}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(q_{\gamma\alpha i}\,h^{2r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(q_{\gamma\alpha i}\,\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\eta}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(p_{3\alpha i}\,\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\tilde{\eta}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}h^{2r+1}\dot{\tilde{\eta}}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\dot{\tilde{\eta}}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(q^{*}_{3\alpha i}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\dot{\tilde{\eta}}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(\beta_{\alpha i}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r}\right)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\theta}_{s}\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-$$

$$M^{*}_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\theta}_{s}h^{r+s+1}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\tfrac{1}{2}E_{ijkl}h^{r+s+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\nu_{ls'}+$$

$$\overset{s}{b}_{ls'}\nu_{ks'})h^{r+s'+1}\ +\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}h^{r+s+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}E^{*}_{ijkl}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{\nu}_{ls'}+$$

$$\overset{s}{b}_{ls'}\dot{\nu}_{ks'})h^{r+s'+1}+\tilde{b}_{ij}h^{r+s+1}\,\psi_{r}+b^{*}_{ij}h^{r+s+1}\dot{\psi}_{r}+d_{ij\gamma}(h^{r+s+1}\psi_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\psi_{s'}\,h^{r+s+1})-$$

$$d_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\psi_{s'}h^{r+s+1})+d^{*}_{ij\gamma}(h^{r+s+1}\dot{\psi}_{s,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1})-$$

$$d^{*}_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1}+p_{\gamma ij}\,(h^{r+s+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\tilde{\chi}_{s'}\,h^{r+s'+1})-$$

$$p_{3ij}\,\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\chi_{s'}\,h^{r+s'+1}+p^{*}_{\gamma ij}(h^{r+s+1}\,\dot{\tilde{\chi}}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\tilde{\chi}}_{s'}h^{r+s'+1})-$$

$$p^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\tilde{\chi}}_{s'}h^{r+s'+1}+q_{\gamma ij}\left(h^{r+s+1}\eta_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\tilde{\eta}_{s'}\,h^{r+s'+1}\right)-$$

$$q_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\tilde{\eta}_{s'}\,h^{r+s'+1}+\ q^{*}_{\gamma ij}(h^{r\dot{+}s+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\dot{\tilde{\eta}}_{s'}\,h^{r+s'+1})-$$

$$q^{*}_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{js'}\dot{\tilde{\eta}}_{s'}h^{r+s'+1}-\beta_{ij}\,h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{r}+M^{*}_{ij\gamma}\,(h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{r,\gamma}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\tilde{\theta}_{s'}\,h^{r+s'+1})-$$

$$M^{*}_{ij3}\,\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\tilde{\theta}_{s'}\,h^{r+s'+1}\,]+h^{r}\overset{r}{X}_{i}=\rho h^{r}\,\frac{\partial^{2}h^{r+1}u_{ir}}{\partial t^{2}}$$

$\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}h^{2r+1}v_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}h^{2r+1}v_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}v_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$

$\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}v_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{v}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{v}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+$

$\frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\dot{v}_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}\dot{v}_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+(d_\alpha\, h^{2r+1}\psi_r)_{,\alpha}+$

$\left(d^*_\alpha h^{2r+1}\,\dot{\psi}_r\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}h^{2r+1}\,\psi_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\psi_s\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(a^*_{\alpha k}\,h^{2r+1}\dot{\psi}_{r,k}\right)_{,\alpha}+$

$\left(a^*_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\dot{\psi}_s h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(a_\alpha\, h^{2r+1}\tilde{\theta}_r\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}^*_{\alpha k}h^{2r+1}\,\tilde{\theta}_{r,k}\right)_{,\alpha}+$

$\left(\tilde{P}^*_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}\tilde{\theta}_s\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\frac{1}{2}d_{klj}h^{r+s+1}\left(v_{kr,l}+v_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}d_{klj}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}v_{ls}+$

$\overset{s}{b}_{ls'}v_{ks'})h^{r+s'+1}+\frac{1}{2}d^*_{klj}h^{r+s+1}\left(\dot{v}_{ks,l}+\dot{v}_{ls,k}\right)+\frac{1}{2}d^*_{klj}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{v}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{v}_{ks'})h^{r+s'+1}+$

$d_jh^{r+s+1}\psi_s+d^*_jh^{r+s+1}\dot{\psi}_s+\tilde{\alpha}_{jk}\left(h^{r+s+1}\psi_{s,k}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks'}\,\psi_{s'}h^{r+s'+1}\right)+\alpha^*_{kj}\left(h^{r+s+1}\dot{\psi}_{s,k}+\right.$

$\left.\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1}\right)-\alpha_jh^{r+s+1}\tilde{\theta}_s+\tilde{P}^*_{jk}\left(h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{s,k}+\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{b}_{ks}\,\tilde{\theta}_sh^{r+s'+1}\right]-$

$d_i\left(h^{2r+1}\psi_{r,i}+\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\psi_sh^{r+s+1}\right)-\tilde{b}_{ij}\left(\frac{1}{2}h^{2r+1}(v_{ir,j}+v_{jr,i})+\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,v_{js}h^{r+s+1}+\right.$

$\left.\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,v_{is}h^{r+s+1})\right)-\tilde{\xi}h^{2r+1}\psi_r-b^*_{ij}\left(\frac{1}{2}h^{2r+1}\left(\dot{v}_{ir,j}+\dot{v}_{jr,i}\right)+\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{v}_{js}h^{r+s+1}+\right.$

$\left.\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\dot{v}_{is}h^{r+s+1}\right)-\xi^*h^{2r+1}\dot{\psi}_r+\tilde{m}h^{2r+1}\tilde{\theta}_r-R^*_j\left(h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r,j}+\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{js}\,\tilde{\theta}_sh^{r+s+1}\right)+$

$h^r\overset{r}{H}=\rho kh^r\,\frac{\partial^2h^{r+1}\psi_r}{\partial t^2}$

$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}h^{2r+1}v_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}h^{2r+1}v_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}v_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$

$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}v_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^*_{\alpha kl}h^{2r+1}\dot{v}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^*_{\alpha kl}h^{2r+1}\dot{v}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+$

$\frac{1}{2}\left(p^*_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ks}v_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^*_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{ls}v_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\zeta_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$

$\left(\zeta_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\chi}_sh^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\zeta_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\chi}_sh^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$

$\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\eta}_sh^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{\infty}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\eta}_sh^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{n}_\alpha h^{2r+1}\tilde{\theta}_r\right)_{,\alpha}+$

$\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}q_{ikl}h^{r+s+1}\left(v_{kr,l}+v_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,v_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls}v_{ks'})h^{r+s'+1}$

$+\frac{1}{2}q^*_{ikl}h^{r+s+1}\left(\dot{v}_{kr,l}+\dot{v}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q^*_{ikl}\sum_{s'=s+1}^{\infty}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{v}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{v}_{ks'})h^{r+s'+1}-\zeta_{i\gamma}\left(h^{r+s+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+\right.$

$\sum_{s'=s+1}^{\infty} \overset{s}{b}_{\gamma s'}\, \tilde{\chi}_{s'} h^{r+s'+1}\Big) + \zeta_{i3} \sum_{s'=s+1}^{\infty} \overset{s}{a}_{3s'}\, \tilde{\chi}_{s'} h^{r+s'+1} - \tilde{a}_{i\gamma} \Big(h^{r+s+1} \tilde{\eta}_{r,\gamma} +$

$\sum_{s'=s}^{\infty} \overset{s}{b}_{\gamma s'}\, \tilde{\eta}_{s'} h^{r+s'+1}\Big) + \tilde{a}_{i3} \sum_{s'=s+1}^{\infty} \overset{s}{a}_{3s'}\, \tilde{\eta}_{s'} h^{r+s'+1} + \tilde{n}_i h^{r+s+1} \tilde{\theta}_s] + h^r \overset{r}{D} = h^r f_{er}$

$\left(k_{\alpha k}\, h^{2r+1}\, \tilde{\theta}_{r,k}\right)_{,\alpha} + \Big(k_{\alpha k} \sum_{s=r+1}^{\infty} \overset{r}{b}_{ks}\, \theta_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(f_{kl\alpha}^{*} h^{2r+1} \dot{v}_{kr,l}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(f_{kl\alpha}^{*} h^{2r+1} \dot{v}_{lr,k}\right)_{,\alpha} +$

$\frac{1}{2}\Big(f_{kl\alpha}^{*} \sum_{s=r+1}^{\infty} \overset{r}{b}_{ks}\, \dot{v}_{ls} h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\Big(f_{kl\alpha}^{*} \sum_{s=r+1}^{\infty} \overset{r}{b}_{ls}\, \dot{v}_{ks} h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \left(b_{\alpha}^{*}\, h^{2r+1} \dot{\psi}_r\right)_{,\alpha} +$

$\left(a_{\alpha k} h^{2r+1}\, \dot{\psi}_{r,k}\right)_{,\alpha} + \Big(a_{\alpha k} \sum_{s=r+1}^{\infty} \overset{r}{b}_{ks}\, \dot{\psi}_s h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \sum_{s=0}^{r} \overset{r}{a}_{js}\, [k_{ij}\, \Big(h^{r+s+1} \tilde{\theta}_{s,i} +$

$\sum_{s'=s+1}^{\infty} \overset{s}{b}_{is'} \tilde{\theta}_{s'} h^{r+s'+1}\Big) + \frac{1}{2} f_{jkl}\, h^{r+s+1}\left(\dot{v}_{ks,l} + \dot{v}_{ls,k}\right) + \frac{1}{2} f_{jkl} \sum_{s'=s+1}^{\infty} (\overset{s}{b}_{ks'}\, \dot{v}_{ls'} + \overset{s}{b}_{ls'} \dot{v}_{ks'}) h^{r+s'+1} +$

$b_j\, h^{r+s+1} \dot{\psi}_s + a_{ij} (h^{r+s+1} \dot{\psi}_{s,i} + \sum_{s'=s+1}^{\infty} \overset{s}{b}_{is} \dot{\psi}_s\ h^{r+s'+1})] + h^r \overset{r}{Q} = h^r T_0 \frac{\partial h^{r+1} S}{\partial t}$

უკანასკნელ განტოლებებს N-ურ მიახლოებაში ( r=0,1,..,N) ექნებათ შემდეგი სახე :

$\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta} h^{2r+1} v_{kr,\delta}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l} h^{2r+1} v_{lr,\gamma}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\Big(E_{\alpha ikl} \sum_{s=r+1}^{N} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ks}\, v_{ls}\Big)_{,\alpha} +$

$\frac{1}{2}\Big(E_{\alpha ikl} \sum_{s=r+1}^{N} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ls}\, v_{ks}\Big)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta}^{*} h^{2r+1} \dot{v}_{kr,\delta}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l}^{*} h^{2r+1} \dot{v}_{kr,\gamma}\right)_{,\alpha} +$

$\frac{1}{2}\Big(E_{\alpha ikl}^{*} \sum_{s=r+1}^{N} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ks}\, \dot{v}_{ls}\Big)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\Big(E_{\alpha ikl}^{*} \sum_{s=r+1}^{N} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ls}\, \dot{v}_{ks}\Big)_{,\alpha} + \left(\tilde{b}_{\alpha i} h^{2r+1}\, \psi_r\right)_{,\alpha} +$

$\left(b_{\alpha i}^{*} h^{2r+1} \dot{\psi}_r\right)_{,\alpha} + \left(d_{\alpha i\gamma} h^{2r+1} \psi_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(d_{\alpha ik} \sum_{s=r+1}^{N} h^{r+s+1} \overset{r}{b}_{ks}\, \psi_s\Big)_{,\alpha} -$

$\Big(d_{\alpha i3} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{a}_{3s} \psi_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \left(d_{\alpha i\gamma}^{*}\, h^{2r+1} \dot{\psi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(d_{\alpha ik}^{*} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{b}_{ks}\, \dot{\psi}_s h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} -$

$\Big(d_{\alpha i3}^{*} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{a}_{3s} \dot{\psi}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \left(p_{\gamma\alpha i}\, h^{2r+1} \tilde{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(p_{\gamma\alpha i} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{b}_{\gamma s} \tilde{\chi}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} -$

$\Big(p_{3\alpha i} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{a}_{3s} \tilde{\chi}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} + \left(p_{\gamma\alpha i}^{*} h^{2r+1} \dot{\tilde{\chi}}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(p_{\gamma\alpha i}^{*} \sum_{s=r}^{N} \overset{r}{b}_{\gamma s}\, \dot{\tilde{\chi}}_s h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} +$

$\left(q_{\gamma\alpha i}\, h^{2r+1} \tilde{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(q_{\gamma\alpha i} \sum_{s=r}^{N} \overset{r}{b}_{\gamma s} \tilde{\eta}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} - \Big(p_{3\alpha i} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{a}_{3s} \tilde{\eta}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} +$

$\left(q_{\gamma\alpha i}^{*} h^{2r+1} \dot{\tilde{\eta}}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \Big(q_{\gamma\alpha i}^{*} \sum_{s=r}^{N} \overset{r}{b}_{\gamma s}\, \dot{\tilde{\eta}}_s h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} - \Big(q_{3\alpha i}^{*} \sum_{s=r+1}^{N} \overset{r}{a}_{3s} \dot{\tilde{\eta}}_s\, h^{r+s+1}\Big)_{,\alpha} -$

$\left(\beta_{\alpha i}h^{2r+1}\tilde{\theta}_r\right)_{,\alpha} + \left(M^*_{\alpha i\gamma}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha} + \left(M^*_{\alpha i\gamma}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\tilde{\theta}_s\, h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} -$

$M^*_{\alpha i3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\theta}_s h^{r+s+1} + \sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\frac{1}{2}E_{ijkl}h^{r+s+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right) + \frac{1}{2}E_{ijkl}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\nu_{ls'} +$

$\overset{s}{b}_{ls'}\nu_{ks'})h^{r+s'+1} + \frac{1}{2}E^*_{ijkl}h^{r+s+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right) + \frac{1}{2}E^*_{ijkl}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{\nu}_{ls'} +$

$\overset{s}{b}_{ls'}\dot{\nu}_{ks'})h^{r+s'+1} + \tilde{b}_{ij}h^{r+s+1}\,\psi_r + b^*_{ij}h^{r+s+1}\dot{\psi}_r + d_{ij\gamma}(h^{r+s+1}\psi_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}b_{\gamma s'}\overset{s}{\psi}_{s'}\,h^{r+s+1}) -$

$d_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\psi_{s'}h^{r+s+1}) + d^*_{ij\gamma}(h^{r+s+1}\dot{\psi}_{s,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1}) -$

$d^*_{ij3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1} + p_{\gamma ij}\,(h^{r+s+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}b_{\gamma s'}\overset{s}{\tilde{\chi}}_{s'}\,h^{r+s'+1}) -$

$p_{3ij}\ \sum_{s'=s+1}^{N}a_{3s'}\overset{s}{\chi}_{s'}\,h^{r+s'+1} + p^*_{\gamma ij}(h^{r+s+1}\ \dot{\tilde{\chi}}_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\dot{\tilde{\chi}}_{s'}h^{r+s'+1}) -$

$p^*_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{\infty}\overset{s}{a}_{3s'}\,\dot{\tilde{\chi}}_{s'}h^{r+s'+1} + q_{\gamma ij}\left(h^{r+s+1}\eta_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}b_{\gamma s'}\overset{s}{\tilde{\eta}}_{s'}\,h^{r+s'+1}\right) -$

$q_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}a_{3s'}\overset{s}{\tilde{\eta}}_{s'}\ h^{r+s'+1} + \ q^*_{\gamma ij}(h^{r+\dot{s}+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}b_{\gamma s'}\overset{s}{\dot{\tilde{\eta}}}_{s'}\ h^{r+s'+1}) -$

$q^*_{3ij}\sum_{s'=s+1}^{N}a_{js'}\overset{s}{\dot{\tilde{\eta}}}_{s'}h^{r+s'+1} - \beta_{ij}\,h^{r+s+1}\tilde{\theta}_r + M^*_{ij\gamma}\,(h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{r,\gamma} + \sum_{s'=s+1}^{N}b_{\gamma s'}\overset{s}{\tilde{\theta}}_{s'}\ h^{r+s'+1}) -$

$M^*_{ij3}\ \sum_{s'=s+1}^{N}a_{3s'}\overset{s}{\tilde{\theta}}_{s'}\ h^{r+s'+1}\ ] + h^r\overset{r}{X}_i = \rho h^r\,\frac{\partial^2 h^{r+1}u_{ir}}{\partial t^2}$

$\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}h^{2r+1}\nu_{kr,l}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}h^{2r+1}\nu_{lr,k}\right)_{,\alpha} + \ \frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} +$

$\frac{1}{2}\left(d_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{\nu}_{kr,l}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{\nu}_{lr,k}\right)_{,\alpha} +$

$\frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\nu}_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(d^*_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{\nu}_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} + (d_\alpha\ h^{2r+1}\psi_r)_{,\alpha} +$

$\left(d^*_\alpha h^{2r+1}\ \dot{\psi}_r\right)_{,\alpha} + \left(\tilde{a}_{\alpha k}h^{2r+1}\ \psi_{r,k}\right)_{,\alpha} + \left(\tilde{a}_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\psi_s\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} + \left(a^*_{\alpha k}\ h^{2r+1}\dot{\psi}_{r,k}\right)_{,\alpha} +$

$\left(a^*_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\psi}_s h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} - \left(a_\alpha\ h^{2r+1}\tilde{\theta}_r\right)_{,\alpha} + \left(\tilde{P}^*_{\alpha k}h^{2r+1}\ \tilde{\theta}_{r,k}\right)_{,\alpha} +$

$\left(\tilde{P}^*_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\tilde{\theta}_s\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha} + \sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[\frac{1}{2}d_{klj}h^{r+s+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right) + \frac{1}{2}d_{klj}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\nu_{ls} +$

$\overset{s}{b}_{ls'}\nu_{ks'})h^{r+s'+1} + \frac{1}{2}d^*_{klj}h^{r+s+1}\left(\dot{\nu}_{ks,l}+\dot{\nu}_{ls,k}\right) + \frac{1}{2}d^*_{klj}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\ \dot{\nu}_{ls'} + \overset{s}{b}_{ls'}\dot{\nu}_{ks'})h^{r+s'+1} +$

$d_j h^{r+s+1}\psi_s + d^*_j h^{r+s+1}\dot{\psi}_s + \tilde{\alpha}_{jk}\left(h^{r+s+1}\psi_{s,k} + \sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{ks'}\,\psi_{s'}h^{r+s'+1}\right) + \alpha^*_{kj}\left(h^{r+s+1}\dot{\psi}_{s,k} +\right.$

$\left.\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\psi}_{s'}h^{r+s'+1}\right) - \alpha_j h^{r+s+1}\tilde{\theta}_s + \tilde{P}^*_{jk}\left(h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{s,k} + \sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{ks}\,\tilde{\theta}_s h^{r+s'+1}\right] -$

$d_i\left(h^{2r+1}\psi_{r,i} + \sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,\psi_s h^{r+s+1}\right) - \tilde{b}_{ij}\left(\frac{1}{2}h^{2r+1}(\nu_{ir,j}+\nu_{jr,i}) + \frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,\nu_{js}h^{r+s+1} +\right.$

$\left.\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,\nu_{is}h^{r+s+1})\right) - \tilde{\xi}h^{2r+1}\psi_r - b^*_{ij}\left(\frac{1}{2}h^{2r+1}\left(\dot{\nu}_{ir,j}+\dot{\nu}_{jr,i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{is}\,\dot{\nu}_{js}h^{r+s+1} +\right.$

$\frac{1}{2}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,\dot{\nu}_{is}h^{r+s+1}\Big)-\xi^{*}h^{2r+1}\dot{\psi}_{r}+\widetilde{m}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r}-R_{j}^{*}\left(h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r,j}+\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{js}\,\tilde{\theta}_{s}h^{r+s+1}\right)+$
$h^{r}\overset{r}{H}=\rho kh^{r}\,\frac{\partial^{2}h^{r+1}\psi_{r}}{\partial t^{2}}$

$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}h^{2r+1}\nu_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}h^{2r+1}\nu_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}^{*}h^{2r+1}\dot{\nu}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}^{*}h^{2r+1}\dot{\nu}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}^{*}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}^{*}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\zeta_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$
$\left(\zeta_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\chi}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\zeta_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\chi}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$
$\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\eta}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\eta}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{n}_{\alpha}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r}\right)_{,\alpha}+$
$\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}q_{ikl}h^{r+s+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\nu_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\nu_{ks'})h^{r+s'+1}$
$+\frac{1}{2}q_{ikl}^{*}h^{r+s+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}^{*}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\nu}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{\nu}_{ks'})h^{r+s'+1}-\zeta_{i\gamma}\Big(h^{r+s+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+$
$\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\tilde{\chi}_{s'}h^{r+s'+1}\Big)+\zeta_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\tilde{\chi}_{s'}h^{r+s'+1}-\tilde{a}_{i\gamma}\Big(h^{r+s+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+$
$\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\tilde{\eta}_{s'}h^{r+s'+1}\Big)+\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\tilde{\eta}_{s'}h^{r+s'+1}+\tilde{n}_{i}h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{s}]+h^{r}\overset{r}{D}=h^{r}f_{er}$

$\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}h^{2r+1}\nu_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}h^{2r+1}\nu_{lr,k}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}^{*}h^{2r+1}\dot{\nu}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}^{*}h^{2r+1}\dot{\nu}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+$
$\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}^{*}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\nu_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha kl}^{*}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\nu_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$
$\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\chi}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\chi}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}-\left(\xi_{\alpha\gamma}h^{2r+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}\right)_{,\alpha}-$
$\left(\xi_{\alpha\gamma}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{\gamma s}\,\tilde{\eta}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\xi_{\alpha 3}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{a}_{3s}\,\tilde{\eta}_{s}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}_{\alpha}h^{2r+1}\tilde{\theta}_{r}\right)_{,\alpha}+$
$\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{is}\,[\frac{1}{2}q_{ikl}h^{r+s+1}\left(\nu_{kr,l}+\nu_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\nu_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\nu_{ks'})h^{r+s'+1}$
$+\frac{1}{2}q_{ikl}^{*}h^{r+s+1}\left(\dot{\nu}_{kr,l}+\dot{\nu}_{lr,k}\right)+\frac{1}{2}q_{ikl}^{*}\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{\nu}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{\nu}_{ks'})h^{r+s'+1}-\tilde{a}_{i\gamma}\Big(h^{r+s+1}\tilde{\chi}_{r,\gamma}+$
$\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\tilde{\chi}_{s'}h^{r+s'+1}\Big)+\tilde{a}_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\tilde{\chi}_{s'}h^{r+s'+1}-\xi_{i\gamma}\Big(h^{r+s+1}\tilde{\eta}_{r,\gamma}+$
$\sum_{s'=s}^{N}\overset{s}{b}_{\gamma s'}\,\tilde{\eta}_{s'}h^{r+s'+1}\Big)+\xi_{i3}\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{a}_{3s'}\,\tilde{\eta}_{s'}h^{r+s'+1}+\tilde{p}_{i}h^{r+s+1}\theta_{s}]+h^{r}\overset{r}{B}=0$

$$\left(k_{\alpha k}\,h^{2r+1}\,\tilde{\theta}_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(k_{\alpha k}\,\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\theta_s\,h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{v}_{kr,l}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}h^{2r+1}\dot{v}_{lr,k}\right)_{,\alpha}+$$

$$\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{v}_{ls}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{kl\alpha}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ls}\,\dot{v}_{ks}h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\left(b^{*}_{\alpha}\,h^{2r+1}\dot{\psi}_r\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(a_{\alpha k}h^{2r+1}\,\dot{\psi}_{r,k}\right)_{,\alpha}+\left(a_{\alpha k}\sum_{s=r+1}^{N}\overset{r}{b}_{ks}\,\dot{\psi}_s h^{r+s+1}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=0}^{r}\overset{r}{a}_{js}\,[k_{ij}\,\left(h^{r+s+1}\tilde{\theta}_{s,i}+\right.$$

$$\left.\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{is'}\tilde{\theta}_{s'}h^{r+s'+1}\right)+\frac{1}{2}f_{jkl}\,h^{r+s+1}\left(\dot{v}_{ks,l}+\dot{v}_{ls,k}\right)+\frac{1}{2}f_{jkl}\,\sum_{s'=s+1}^{N}(\overset{s}{b}_{ks'}\,\dot{v}_{ls'}+\overset{s}{b}_{ls'}\dot{v}_{ks'})h^{r+s'+1}+$$

$$b_j\,h^{r+s+1}\dot{\psi}_s+a_{ij}(h^{r+s+1}\dot{\psi}_{s,i}+\sum_{s'=s+1}^{N}\overset{s}{b}_{is}\dot{\psi}_s\;\;h^{r+s'+1})]+h^r\overset{r}{Q}=h^rT_0\,\frac{\partial h^{r+1}S}{\partial t}$$

## 3. $N = 0$ მიახლოება

ნულოვან მიახლოებაში ზემოთ მიღებულ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$X_{\alpha j0,\alpha} + \overset{0}{X_j} = \rho \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}, \qquad i,j = 1,2,3\ ; \quad \alpha = 1,2 \tag{3.1}$$

$$H_{\alpha 0,\alpha} + H_{00} + \overset{0}{H} = \rho k \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} \qquad \alpha = 1,2 \tag{3.2}$$

$$D_{\alpha 0,\alpha} + \overset{0}{D} = f_{e0}, \qquad \alpha = 1,2 \tag{3.3}$$

$$B_{\alpha 0,\alpha} + \overset{0}{B} = 0, \qquad \alpha = 1,2 \tag{3.4}$$

$$Q_{\alpha 0,\alpha} + \overset{0}{Q} = T_0 \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad \alpha = 1,2 \tag{3.5}$$

$$X_{ij0} = \frac{1}{2} E_{ijkl} h\left(\nu_{k0,l} + \nu_{l0,k}\right) + \frac{1}{2} E^*_{ijkl} h\left(\dot{\nu}_{k0,l} + \dot{\nu}_{l0,k}\right) + \tilde{b}_{ij}\, h\psi_0 + b^*_{ij} h\dot{\psi}_0 + d_{ij\gamma} h\psi_{0,\gamma} + d^*_{ij\gamma} h\dot{\psi}_{0,\gamma} + p_{\gamma ij}\, h\tilde{\chi}_{0,\gamma} + p^*_{\gamma ij} h\dot{\tilde{\chi}}_{0,\gamma} + q_{\gamma ij} h\tilde{\eta}_{0,\gamma} + q^*_{\gamma ij} h\dot{\tilde{\eta}}_{0,\gamma} - \beta_{ij} h\tilde{\theta}_0 + M^*_{ij\gamma} h\tilde{\theta}_{0.\gamma} \tag{3.6}$$

$$H_{j0} = \frac{1}{2} d_{klj} h\left(\nu_{k0,l} + \nu_{l0,k}\right) + \frac{1}{2} d^*_{klj} h\left(\dot{\nu}_{k0,l} + \dot{\nu}_{l0,k}\right) + d_j h\psi_0 + d^*_j h\dot{\psi}_0 + \tilde{\alpha}_{ji} h\psi_{0,i} + \alpha^*_{ji} h\dot{\psi}_{0,i} - \alpha_j h\tilde{\theta}_0 + \tilde{P}^*_{ji} h\tilde{\theta}_{0,i} \tag{3.7}$$

$$H_{00} = -d_i h\psi_{0,i} - \frac{1}{2} \tilde{b}_{ij} h(\nu_{i0,j} + \nu_{j0,i}) - \tilde{\xi} h\psi_0 - \frac{1}{2} b^*_{ij} h\left(\dot{\nu}_{i0,j} + \dot{\nu}_{j0,i}\right) - \xi^* h\dot{\psi}_0 + \tilde{m} h\tilde{\theta}_0 - R^*_j h\tilde{\theta}_{0,j} \tag{3.8}$$

$$D_{j0} = \frac{1}{2} p_{jkl} h\left(\nu_{k0,l} + \nu_{l0,k}\right) + \frac{1}{2} p^*_{jkl} h\left(\dot{\nu}_{k0,l} + \dot{\nu}_{l0,k}\right) - \zeta_{j\gamma} h\tilde{\chi}_{0,\gamma} - \tilde{a}_{j\gamma} h\tilde{\eta}_{0,\gamma} + \tilde{n}_j h\tilde{\theta}_0 \tag{3.9}$$

$$B_{j0} = \frac{1}{2} q_{jkl} h\left(\nu_{k0,l} + \nu_{l0,k}\right) + \frac{1}{2} q^*_{jkl} h\left(\dot{\nu}_{k0,l} + \dot{\nu}_{l0,k}\right) - \tilde{a}_{j\gamma} h\tilde{\chi}_{0,\gamma} - \xi_{j\gamma} h\tilde{\eta}_{0,\gamma} + \tilde{p}_j h\tilde{\theta}_0 \tag{3.10}$$

$$S_0 = \beta_{ij}\, \frac{1}{2} h(\nu_{i0,j} + \nu_{j0,i}) + a h\tilde{\theta}_0 + m h\psi_0 + a_i h\psi_{0,i} \tag{3.12}$$

$$Q_{j0} = k_{ij}\, h\tilde{\theta}_{r,i} + \frac{1}{2} f_{jkl}\, h\left(\dot{\nu}_{k0,l} + \dot{\nu}_{l0,k}\right) + b_j\, h\dot{\psi}_0 + a_{ij} h\dot{\psi}_{0,i} \tag{3.13}$$

$$e_{ij0} = \frac{1}{2} h\left(\nu_{i0,j} + \nu_{j0,i}\right)$$

$$\nu_{jo} \coloneqq \frac{u_0}{h}, \psi_0 \coloneqq \frac{\varphi_0}{h}, \qquad \tilde{\chi}_0 \coloneqq \frac{\chi_0}{h}, \quad \tilde{\eta}_0 \coloneqq \frac{\eta_0}{h}, \quad \tilde{\theta}_0 \coloneqq \frac{\theta_0}{h}$$

$$\frac{1}{2}\left(E_{\alpha ik\delta}h\nu_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E_{\alpha i\gamma l}h\nu_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha ik\delta}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(E^{*}_{\alpha i\gamma l}h\dot{\nu}_{k0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{b}_{\alpha i}h\,\psi_0\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(b^{*}_{\alpha i}h\dot{\psi}_0\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha i\gamma}h\psi_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d^{*}_{\alpha i\gamma}\,h\dot{\psi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(p_{\gamma\alpha i}\,h\tilde{\chi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(p^{*}_{\gamma\alpha i}h\dot{\tilde{\chi}}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(q_{\gamma\alpha i}\,h\tilde{\eta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(q^{*}_{\gamma\alpha i}h\dot{\tilde{\eta}}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}-\left(\beta_{\alpha i}h\tilde{\theta}_0\right)_{,\alpha}+\left(M^{*}_{\alpha i\gamma}h\tilde{\theta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\overset{0}{X}_i=\rho h^{r}\frac{\partial^2 h\nu_{i0}}{\partial t^2} \qquad (3.14)$$

$$\frac{1}{2}\left(d_{k\delta\alpha}h\nu_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{\gamma l\alpha}h\nu_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{k\delta\alpha}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{\gamma l\alpha}h\dot{\nu}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha}\,h\psi_0\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(d^{*}_{\alpha}h\,\dot{\psi}_0\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha\delta}h\,\psi_{0,\delta}\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha\delta}\,h\dot{\psi}_{0,\delta}\right)_{,\alpha}-\left(a_{\alpha}\,h\tilde{\theta}_0\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha\delta}h\,\tilde{\theta}_{0,\delta}\right)_{,\alpha}-d_{\alpha}h\psi_{0,\alpha}-$$

$$\frac{1}{2}\tilde{b}_{i\beta}h\nu_{i0,\beta}-\frac{1}{2}\tilde{b}_{\alpha j}\nu_{j0,\alpha}-\tilde{\xi}h\psi_0-\frac{1}{2}b^{*}_{i\beta}h\,\dot{\nu}_{i0,\beta}+\frac{1}{2}b^{*}_{\alpha j}h\dot{\nu}_{j0,\alpha}-\xi^{*}h\dot{\psi}_0+\widetilde{m}h\tilde{\theta}_0-R^{*}_{\beta}h\tilde{\theta}_{0,\beta}+\overset{0}{H}=$$

$$\rho kh\frac{\partial^2 h\psi_0}{\partial t^2}$$

რადგან $\tilde{b}_{ij}=\tilde{b}_{ji}\,,b^{*}_{ij}=b^{*}_{ji}$

$$\frac{1}{2}\left(d_{k\delta\alpha}h\nu_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d_{\gamma l\alpha}h\nu_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{k\delta\alpha}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(d^{*}_{\gamma l\alpha}h\dot{\nu}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(d_{\alpha}\,h\psi_0\right)_{,\alpha}+$$

$$\left(d^{*}_{\alpha}h\,\dot{\psi}_0\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{a}_{\alpha\delta}h\,\psi_{0,\delta}\right)_{,\alpha}+\left(a^{*}_{\alpha\delta}\,h\dot{\psi}_{0,\delta}\right)_{,\alpha}-\left(a_{\alpha}\,h\tilde{\theta}_0\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}^{*}_{\alpha\delta}h\,\tilde{\theta}_{0,\delta}\right)_{,\alpha}-d_{\alpha}h\psi_{0,\alpha}-$$

$$\tilde{b}_{i\alpha}h\nu_{i0,\alpha}-\tilde{\xi}h\psi_0-b^{*}_{i\alpha}h\,\dot{\nu}_{i0,\alpha}-\xi^{*}h\dot{\psi}_0+\widetilde{m}h\tilde{\theta}_0-R^{*}_{\beta}h\tilde{\theta}_{0,\beta}+\overset{0}{H}=\rho kh\frac{\partial^2 h\psi_0}{\partial t^2} \qquad (3.15)$$

$$\frac{1}{2}\left(p_{\alpha k\delta}h\nu_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p_{\alpha\gamma l}h\nu_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha k\delta}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(p^{*}_{\alpha\gamma l}h\dot{\nu}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}-\left(\zeta_{\alpha\gamma}h\tilde{\chi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}h\tilde{\eta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{n}_{\alpha}h\tilde{\theta}_0\right)_{,\alpha}+\overset{0}{D}=f_{e0} \qquad (3.16)$$

$$\frac{1}{2}\left(q_{\alpha k\delta}h\nu_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q_{\alpha\gamma l}h\nu_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha k\delta}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(q^{*}_{\alpha\gamma l}h\dot{\nu}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}-\left(\tilde{a}_{\alpha\gamma}h\tilde{\chi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}-$$

$$\left(\xi_{\alpha\gamma}h\tilde{\eta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(\tilde{P}_{\alpha}h\tilde{\theta}_0\right)_{,\alpha}+\overset{0}{B}=0 \qquad (3.17)$$

$$\left(k_{\alpha\gamma}\,h\tilde{\theta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{k\delta\alpha}h\dot{\nu}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha}+\frac{1}{2}\left(f^{*}_{\gamma l\alpha}h\dot{\nu}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\left(b^{*}_{\alpha}\,h\dot{\psi}_0\right)_{,\alpha}+\left(a_{\alpha\gamma}h\,\dot{\psi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha}+\overset{0}{Q}=T_0\frac{\partial hS_0}{\partial t}$$

$$\left(k_{\alpha\gamma}\, h\tilde{\theta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(f^{*}_{k\delta\alpha} h\dot{v}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha} + \frac{1}{2}\left(f^{*}_{\gamma l\alpha} h\dot{v}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \left(b^{*}_{\alpha}\, h\dot{\psi}_{0}\right)_{,\alpha} + \left(a_{\alpha\gamma} h\, \dot{\psi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \overset{0}{Q}$$
$$= T_0 h \frac{\partial}{\partial t}(\beta_{ij}\ \frac{1}{2} h(v_{i0,j} + v_{j0,i}) + ah\tilde{\theta}_0 + mh\psi_0 + a_i h\psi_{0,i})$$

$$\left(k_{\alpha\gamma}\, h\tilde{\theta}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(f^{*}_{k\delta\alpha} h\dot{v}_{k0,\delta}\right)_{,\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(f^{*}_{\gamma l\alpha} h\dot{v}_{l0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \left(b^{*}_{\alpha}\, h\dot{\psi}_{0}\right)_{,\alpha} + \left(a_{\alpha\gamma} h\, \dot{\psi}_{0,\gamma}\right)_{,\alpha} + \overset{0}{Q} =$$
$$T_0 h\ (\beta_{ij}\ \tfrac{1}{2} h(\dot{v}_{i0,j} + \dot{v}_{j0,i}) + ah\dot{\tilde{\theta}}_0 + mh\dot{\psi}_0 + a_i\dot{\psi}_{0,i}) \qquad (3.18)$$

განვიხილოთ სტატიკის შემთხვევა და დავუშვათ, რომ (3.14)-(3.18) განტოლებებში შემავალი სიდიდეები დამოკიდებულია მხოლოდ $x_2$ –ზე, მაშინ (3.14)-(3.18-დან მივიღებთ:

$$\tfrac{1}{2}\left(E_{2ik2} h v_{k0,2}\right)_{,2} + \tfrac{1}{2}\left(E_{2i2l} h v_{l0,2}\right)_{,2} + \left(\tilde{b}_{2i} h\, \psi_0\right)_{,2} + \left(d_{2i2} h\psi_{0,2}\right)_{,2} + \left(p_{22i}\, h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} +$$
$$\left(q_{22i}\, h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\beta_{2i} h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \left(M^{*}_{2i2} h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{X}_i = 0 \qquad (3.19)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(d_{k22} h v_{k0,2}\right)_{,2} + \tfrac{1}{2}\left(d_{2l2} h v_{l0,2}\right)_{,2} + (d_2\ h\psi_0)_{,2} + \left(\tilde{a}_{22} h\, \psi_{0,2}\right)_{,2} - \left(a_2\ h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \left(\tilde{P}^{*}_{22} h\ \tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} -$$
$$d_2 h\psi_{0,2} - \tilde{b}_{i2} h v_{i0,2}\ - \tilde{\xi} h\psi_0 + \tilde{m} h\tilde{\theta}_0 - R^{*}_2 h\tilde{\theta}_{0,2} + \overset{0}{H} = 0\ , \qquad (3.20)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(p_{2k2} h v_{k0,2}\right)_{,2} + \tfrac{1}{2}\left(p_{22l} h v_{l0,2}\right)_{,2} - \left(\zeta_{22} h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\tilde{a}_{22} h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2} + \left(\tilde{n}_2 h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \overset{0}{D} = f_{e0}, \qquad (3.21)$$

$$\tfrac{1}{2}\left(q_{2k2} h v_{k0,2}\right)_{,2} + \tfrac{1}{2}\left(q_{22l} h v_{l0,2}\right)_{,2} - \left(\tilde{a}_{22} h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\xi_{22} h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2} + \left(\tilde{P}_2 h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \overset{0}{B} = 0\ , \qquad (3.22)$$

$$\left(k_{22}\, h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{Q} = 0 \qquad (3.23)$$

სიმეტრიულობის გამო, $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{jilk} = E_{klij}$, $d_{ijk} = d_{jik}$ $p_{jkl}\ = p_{jlk}$ , $q_{jkl}\ = q_{jlk}$ , (3.19)- (3.23)-დან მივიღებთ :

$$\left(E_{2i2k}h\nu_{k0,2}\right)_{,2}+\left(\tilde{b}_{2i}h\,\psi_0\right)_{,2}+\left(d_{2i2}h\psi_{0,2}\right)_{,2}+\left(p_{22i}\,h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}+\left(q_{22i}\,h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2}-\left(\beta_{2i}h\tilde{\theta}_0\right)_{,2}+$$
$$\left(M^*_{2i2}h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2}+\overset{0}{X}_i=0 \tag{3.24}$$

$$\left(d_{k22}h\nu_{k0,2}\right)_{,2}+\left(d_2\,h\psi_0\right)_{,2}+\left(\tilde{a}_{22}h\,\psi_{0,2}\right)_{,2}-\left(a_2\,h\tilde{\theta}_0\right)_{,2}+\left(\tilde{P}^*_{22}h\,\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2}-d_2h\psi_{0,2}-\tilde{b}_{i2}h\nu_{i0,2}\,-$$
$$\tilde{\xi}h\psi_0+\tilde{m}h\tilde{\theta}_0-R^*_2h\tilde{\theta}_{0,2}+\overset{0}{H}=0 \tag{3.25}$$

$$\left(p_{22K}h\nu_{k0,2}\right)_{,2}-\left(\zeta_{22}h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}-\left(\tilde{a}_{22}h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2}+\left(\tilde{n}_2h\tilde{\theta}_0\right)_{,2}+\overset{0}{D}=f_{e0} \tag{3.26}$$

$$\left(q_{22K}h\nu_{k0,2}\right)_{,2}-\left(\tilde{a}_{22}h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}-\left(\xi_{22}h\tilde{\eta}_{0,2}\right)_{,2}+\left(\tilde{P}_2h\tilde{\theta}_0\right)_{,2}+\overset{0}{B}=0 \tag{3.27}$$

$$\left(k_{22}\,h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2}+\overset{0}{Q}=0 \tag{3.28}$$

## 4. პიეზოელექტრული ანტიბრტყელი დეფორმაცია N=0 მიახლოებაში

განვიხილოთ ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული სხეულის ანტიბრტყელი დეფორმაცია.

N=0 მიახლოებაში ანტიბრტყელი მდგომარეობის პირობებს აქვს შემდეგი სახე :

1. $v_{10} \equiv 0,\ v_{20} \equiv 0,\ \ v_{30} \neq 0$

2. $X_{130} \neq 0, X_{230} \neq 0, X_{\alpha\beta} \neq 0,\ \alpha,\beta = 1{,}2 \quad X_{330} \equiv 0$

3. $e_{130} \neq 0, e_{230} \neq 0, e_{\alpha\beta} \neq 0,\ \alpha,\beta = 1{,}2 \quad e_{330} \equiv 0$

4. $E_{10} \neq 0, E_{20} \neq 0, \quad E_{30} \equiv 0$

5. $D_{10} \neq 0, D_{20} \neq 0, \quad D_{30} \equiv 0$

(3.24)-(3.28) განტოლებებიდან მივიღებთ :

$$\left(E_{2\beta 23} h v_{30,2}\right)_{,2} + \left(p_{22\beta}\, h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\beta_{2\beta} h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \left(M^*_{2\beta 2} h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{X}_\beta = 0$$

$$\left(E_{232k} h v_{k0,2}\right)_{,2} + \left(p_{223}\, h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\beta_{23} h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \left(M^*_{232} h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{X}_3 = 0 \tag{4.1}$$

$$\left(p_{223} h v_{30,2}\right)_{,2} - \left(\zeta_{22} h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} + \left(\tilde{n}_2 h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \overset{0}{D} = f_{e0}$$

$$\left(k_{22}\, h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{Q} = 0$$

თუ განვიხილავთ ტრანსვერსალურად იზოტროპულ პიეზოელექტრულ მასალას , მაშინ:

$$E_{2323} = E_{1313} \neq 0,\ \ E_{2222} = E_{1111} \neq 0,\ \ E_{2233} = E_{1133} \neq 0,\ E_{1122} \neq 0,\ \ E_{3333} \neq 0$$

$$p_{223} = p_{113} \neq 0, \quad \zeta_{11} = \zeta_{22} \neq 0,\ \ \zeta_{33} \neq 0, k_{11} \neq 0 , \beta_{12} = 0,\ \ \beta_{11} = 0\ ,\beta_{13} \neq 0$$

$$M^*_{111} = M^*_{121} = 0,\ \ M^*_{131} \neq 0 \tag{4.2}$$

სხვა ყველა დრეკადი, პიეზოელექტრული და დიელექტრიკული შეღწევადობის კოეფიციენტები ნულის ტოლია.

(4.1)-დან (4.2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ :

$$\overset{0}{X}_\beta = 0, \quad \beta = 1{,}2$$

$$\left(E_{2323}hv_{30,2}\right)_{,2} + \left(p_{223}\, h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} - \left(\beta_{23}h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \left(M^*_{232}h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{X}_3 = 0 \tag{4.3}$$

$$\left(p_{223}hv_{30,2}\right)_{,2} - \left(\zeta_{22}h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} + \left(\tilde{n}_2h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} + \overset{0}{D} = f_{e0}, \tag{4.4}$$

$$\left(k_{22}\, h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} + \overset{0}{Q} = 0 \tag{4.5}$$

(4.3) და (4.4) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(E_{2323}hv_{30,2}\right)_{,2} + \left(p_{223}\, h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} = -\overset{0}{X}_3 + \Theta_1 \tag{4.6}$$

$$\left(p_{223}hv_{30,2}\right)_{,2} - \left(\zeta_{22}h\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} = f_{e0} - \overset{0}{D} + \Theta_2, \tag{4.7}$$

$$\left(k_{22}\, h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2} = -\overset{0}{Q} \tag{4.8}$$

სადაც $\Theta_1 \coloneqq \left(\beta_{23}h\tilde{\theta}_0\right)_{,2} - \left(M^*_{232}h\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2}$

$\Theta_2 \coloneqq -\left(\tilde{n}_2h\tilde{\theta}_0\right)_{,2}$

დავუშვათ $E_{2323}h = E_0x_2^k, \quad E_0 = const > 0,$

$$p_{223}\, h = p_0\, x_2^k, \quad p_0 = const > 0, \quad k = const \geq 0; \tag{4.9}$$

$$\zeta_{22}h = \zeta_0\, x_2^k, \quad \zeta_0 = const > 0,$$

$$k_{22}\, h = k_0\, x_2^k, \quad k_0 = const > 0,$$

(4.6)-(4.8)-დან (4.9)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ :

$$E_0\left(x_2^k v_{30,2}\right)_{,2} + p_0\left(x_2^k\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2} = -\overset{0}{X}_3 + \Theta_1 \tag{4.9}$$

$$p_0\left(x_2^k\nu_{30,2}\right)_{,2}-\zeta_0\left(x_2^k\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}=f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2, \tag{4.10}$$

$$\left(k_0\,x_2^k\tilde{\theta}_{0,2}\right)_{,2}=-\overset{0}{Q} \tag{4.11}$$

$$(\zeta_0\,E_0+p_0^2)\left(x_2^k\nu_{30,2}\right)_{,2}=\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3+\Theta_1)+p_0\,(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2) \tag{4.12}$$

$$(p_0^2+\zeta_0\,E_0)\left(x_2^k\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}=-p_0\,\overset{0}{X}_3-E_0(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2) \tag{4.13}$$

$$x_2\nu_{30,22}+k\nu_{30,2}=(\zeta_0\,E_0+p_0^2)^{-1}x_2^{1-k}[\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3+\Theta_1)+p_0\,(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2)]$$

$$x_2\tilde{\chi}_{0,22}+k\tilde{\chi}_{0,2}=(p_0^2+\zeta_0\,E_0)^{-1}x_2^{1-k}[-p_0\,\overset{0}{X}_3-E_0\left(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2\right)]$$

$$\left(x_2\nu_{30,2}\right)_{,2}+(k-1)\nu_{30,2}=(\zeta_0\,E_0+p_0^2)^{-1}x_2^{1-k}[\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3+\Theta_1)+p_0\,(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2)]$$

$$\left(x_2\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}+(k-1)\tilde{\chi}_{0,2}=(p_0^2+\zeta_0\,E_0)^{-1}x_2^{1-k}[-p_0\,\overset{0}{X}_3-E_0\left(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2\right)]$$

$$\zeta_0\left(x_2^k\tilde{\chi}_{0,2}\right)_{,2}=p_0\left(x_2^k\nu_{30,2}\right)_{,2}-(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2)$$

$$\left((p_0^2x_2^k+\zeta_0\,E_0x_2^k)\nu_{30,2}\right)_{,2}=\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3+\Theta_1)+p_0\,(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2)$$

(4.12)-(4.13) განტოლებები გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left(x_1^k\nu_{30,1}\right)_{,1}=(\zeta_0\,E_0+p_0^2)^{-1}(\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3+\Theta_1)+p_0\,(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2)\,) \tag{4.14}$$

$$(p_0^2+\zeta_0\,E_0)\left(x_1^k\tilde{\chi}_{0,1}\right)_{,1}=(p_0^2+\zeta_0\,E_0)^{-1}(-p_0\,\overset{0}{X}_3-E_0\left(f_{e0}-\overset{0}{D}+\Theta_2\right)) \tag{4.15}$$

(4.12*),(4.13*),(4.11), განტოლებების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე :

$$\nu_{30}(x_2)=(\zeta_0\,E_0+p_0^2)^{-1}\int_L^{x_2}\frac{d\tau}{\tau^k}\int_L^{\xi}[\,\zeta_0\,(-\overset{0}{X}_3(t)+\Theta_1(t))+p_0\,(f_{e0}(t)-\overset{0}{D}(t)+\Theta_2(t)]dt+c_2^1+$$

$$+c_1^1\begin{cases}(1-k)^{-1}\left(x_2^{1-k}-L^{1-k}\right), & k\neq 1\\ \ln x_2-\ln L, & k=1\end{cases} \tag{4.16}$$

$$\tilde{\chi}_0(x_2)=(p_0^2+\zeta_0\,E_0)^{-1}\int_L^{x_2}\frac{d\tau}{\tau^k}\int_L^{\xi}[\,-p_0\,\overset{0}{X}_3(t)-E_0\left(f_{e0}(t)-\overset{0}{D}(t)+\Theta_2(t)\right)]dt+c_2^2+$$

$$+c_1^2\begin{cases}(1-k)^{-1}\left(x_2^{1-k}-L^{1-k}\right), & k\neq 1\\ \ln x_2-\ln L, & k=1\end{cases} \tag{4.17}$$

$$\tilde{\theta}_0=-\int_{\mathrm{L}}^{x_2}\frac{d\tau}{k_0\,\tau^k}\int_{\mathrm{L}}^{\xi}\overset{0}{Q}(t)dt+c_2^3+c_1^3\begin{cases}\frac{(1-k)^{-1}}{k_0}\left(x_2^{1-k}-L^{1-k}\right), & k\neq 1\\ k_0^{-1}(\ln x_2-\ln L), & k=1\end{cases} \tag{4.18}$$

ამოცანა 1. (დირიხლეს ამოცანა) ვთქვათ $k<1$. ვიპოვოთ (4.11),(4.14),(4.15) განტოლებების ამონახსნები, $\nu_{30},\tilde{\chi}_0,\tilde{\theta}_0\in C^2(\,]0,\mathrm{L}[\,)\cap C(\,[0,L])$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს :

$\nu_{30}(0)=c_0^1,\quad \tilde{\chi}_0(0)=c_0^2\,,\ \tilde{\theta}_0(0)=c_0^3\,,\ \nu_{30}(L)=c_L^1,\quad \tilde{\chi}_0(L)=c_L^2\quad \tilde{\theta}_0(L)=c_L^3$

ამოცანა 2. (კელდიშის ამოცანა) ვთქვათ $k\geq 1$. ვიპოვოთ (4.11),(4.14),(4.15) განტოლებების ამონახსნები $\nu_{30},\tilde{\chi}_0,\tilde{\theta}_0\in C^2(\,]0,\mathrm{L}[\,)\cap C(\,[0,L])$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს :

$\tilde{\theta}_0(x_2)=O(1)\,,\ \nu_{30}(x_2)=\mathrm{O}(1),\ \tilde{\chi}_0(x_2)=O(1)\,,\ x_1\to 0+;\ \nu_{30}(L)=c_L^1,\ \tilde{\chi}_0(L)=c_L^2;\ \tilde{\theta}_0(L)=c_L^3$

ამოცანა 1-ის შემთხვევაში $c_\alpha^i$, $i=1,2,3$ ; $\alpha=1,2$ მუდმივებს (4.16)-(4.18)-ის გათვალისწინებით აქვთ შემდეგი სახე :

$$c_1^1=((\zeta_0\,E_0+p_0^2)^{-1}\int_L^0\frac{d\tau}{\tau^k}\ \int_L^\tau[\,\zeta_0\,(-\overset{0}{X_3}(t)+\Theta_1(t))+p_0\,(f_{e0}(t)-\overset{0}{D}(t)+\Theta_2(t)]dt+$$

$$c_L^1-c_0^1)\,(1-k)L^{k-1}$$

$$c_2^1=c_L^1$$

$$c_1^2=\left((p_0^2+\zeta_0\,E_0)^{-1}\int_L^{x_1}\frac{d\tau}{\tau^k}\int_L^\tau[-p_0\overset{0}{X_3}(t)-E_0\left(f_{e0}(t)-\overset{0}{D}(t)+\Theta_2(t)\right)\right]dt+c_L^2-c_0^2)(1-k)L^{k-1}$$

$$c_2^2=c_L^2$$

$$c_1^3=(-\int_{\mathrm{L}}^{x_2}\frac{d\tau}{k_0\,\tau^k}\int_{\mathrm{L}}^{\xi}\overset{0}{Q}(t)dt+c_L^3-c_0^3)k_0\,(1-k)L^{k-1}$$

$$c_2^3=c_L^3$$

ამოცანა 2-ის შემთხვევაში,იმისთვის რომ ამონახსნი იყოს შემოსაზღვრული $c_1^i = 0, i$ =1,2,3

ხოლო $c_2^i$ მუდმივები (4.16)-(4.18)-ის გათვალისწინებით განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$c_2^1 = c_L^1$

$c_2^2 = c_L^2$

$c_2^3 = c_L^3$ .

# დასკვნა

ნაშრომში თერმოდრეკადი კელვინ-ფოიგტის პიეზოელექტრული პრიზმული გარსებისათვის აგებულია იერარქიული მოდელები. ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების $N$-ურ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები. განხილულია ტრანსვერსალურად იზოტროპული პიეზოელექტრული მასალის ანტიბრტყელი დეფორმაცია $N = 0$ მიახლოებაში, დასმული და გამოკვლეულია შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

# გამოყენებული ლიტერატურა

[1] I. Vekua. On a way of calculating of prismatic shells. Prosceeding of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21:191-259, 1995 (Russian)

[2] I. Vekua. The theory of thin shallow shells of variable thickness. . Prosceeding of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30:5103, 1965 (Russian)

[3] Jaiani G., Elastic bodies with non-smooth boundaries-cusped plates and shells, ZAMM, 76, Suppl. 2(1996), 117-120

[4] Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D. and Wendland W.L., Two-Dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary, Journal of Elasticity, 77(2004), 95-112

[5] Vekua I., Shell Theory : General Methods of Construction, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melburne 1985

[6] Jaiani G., Piezoelectric Viscoelsactic Kelvin-Voigt Cusped prismatic shells, Lecture Notes of TICMI (2018), 1512-0511

[7] Jaiani G., on a Mathematical model of bars with variable restangular Cross-sections, ZAMM-Z. Angew. Math. Mech., 81, 3 (2001), 147-173

[8] Chinchaladze N., On some nonclassical Problems for Differential Equations and Their application to the Theory of cusped prismatic shells. Lecture Notes of TICMI, 9 (2008)

[9] Avalishvili G., Avalishvili M., On a hierarchical model of elastic rods with variable cross-section. Appl. Math. Inform. Mech., 9,1 (2004),1-16

[10] Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for elastic rods with variable cross-section Bull. Georgian. Acad. Sci. 174, 3(2006),399-402

[11] ] Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of dynamical one-dimensional models for Thermoelastic beams. Bull. Geogian Acad. 3,3 (2009), 25-32

[12] Jaiani G., Cusped Shell-like Structures Springer , Heidelberg-Dorbrecht-London-New York, 2011

[13] Petia Dineva, Dietmar Gross, Ralf Muller, Tsviatko Rangelov, Dynamic Fractiure of Piezoelectric Materials, Springer (2014)

[14] Avalishvili G., Avalishvili M., One Approximation of Three-Dimensional model of Thermoelastic Piezoelectric Plates By Two-Dimensional Problems (2018)

[15] Avalishvili G., Avalishvili M., Wolfgang H. Muller, One Investigation of Dynamical Three-Dimensional model of Thermoelastic Piezoelactric Solids (2017)

[16] Avalishvili G., Avalishvili M., Wolfgang H. Muller, Investigation of the Three-Dimensional Boundary value Problem of Thermoelastic Piezoelectric solids (2017)

[17] Avalishvili G., Avalishvili M., One Static Hierarchical Two-Dimensional Models of Thermoelastic Piezoelectric Plates With variable Thickness (2018)

[18] Natroshvili D., Mathematical Problems Of Thermo-Electro-Magneto-Elasticity, Lecture Notes of TICMI (2011)

[19] Iesan D., On a Theory of Thermoviscielastic Materials vith Voids, Springer, (2011)

[20] G. Jaiani. Theory of Cusped Euler-Bernoulli Beams and Kirchhoff-Love Plates. Lecture Notes of TICMI, 2002