ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დავითი ადამაძე

ბანახის ფუნქციურ სივრცეებზე განსაზღვრული სინგულარული ფუნქციონალების წარმოდგენის შესახებ

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ს ა მ ა გ ი ს ტ რ ო ნ ა შ რ ო მ ი

ხელმძღვანელი: მათემატიკის დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი **თენგიზ კოპალიანი**

თბილისი 2019

სარჩევი

ანოტაცია

ფუნქციური სივრცის შეუღლებული სივრცის განხილვისას არსებით ამოცანას წარმოადგენს ამ სივრცეზე განსაზღვრული არანულოვანი, სინგულარული ფუნქციონალების დახასიათება. X ფუნქციური სივრცის შეუღლებული X^* სივრცის X_S^* (სინგულარული ნაწილი) ქვესივრცისთვის კარგადაა ცნობილი შემდეგი ამოცანა: არსებობს თუ არა $(L^\infty[0,1])_S^*$ სივრცის (წმინდად სასრულად ადიციურ ზომათა სივრცე) რაიმე M_X ქვესივრცე ისეთი, რომ X_S^* იზომორფული იყოს (როგორც დალაგების მიმართ, აგრეთვე როგორც ნორმირებული სივრცეები) M_X-ის. შევნიშნოთ, რომ არსებობს ფუნქციური სივრცეები, რომლისთვისაც აღნიშნულ ამოცანას უარყოფით პასუხი აქვს (მაგალითად, მარცინკევიჩის სივრცეები). კლასიკური ორლიჩის სივრცისთვის მოყვანილი ამოცანა დადებითად იქნა გადაწყვეტილი ანდოს მიერ, Ando [1].

მოცემულ ნაშრომში ჩვენი ძირითადი მიზანია, ლებეგის ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცისთვის გამოვიკვლიოთ აღნიშნული საკითხი. კერძოდ, ვაჩვენოთ, რომ $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცისთვის სამართლიანია იოსიდა—ჰიუტის ტიპის წარმოდგენა (K. Yosida and E. Hewitt, [3]).

შევნიშნოთ, რომ განხილული ამოცანა აქტუალურია იმდენად, რამდენადაც მას ფართო გამოყენება აქვს ბანახის სივრცეთა გეომეტრიაში, ზომის თეორიაში ოპერატორთა თეორიასა და ა. შ.

Summary

It is essential problem to characterize linear, bounded singular functionals of conjugate space of function spaces. Let's X be a function space and X^* is it's conjugate. It is well-known problem that there exists or not subspace of $(L^\infty[0,1])^*_S$ (purely finitely additive measures) M_X, which is isomorphic to X^*_S (singular part of X^*). We should notice that there exist function spaces (e.g. Marcinkiewicz spaces) for which the problem has negative solution.

In the case of classical Orlicz spaces the problem was solved by Ando [1].

In this work our main goal is to study similar issues for variable-Lebegue spqces. In particular, it will be shown that for $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ there exist representation of Yosida–Hewitt type [3].

The problem is important because of it's wide usage in many fields of functional analysis: geometry of Banach spaces, measure theory, theory of operator, etc.

შესავალი

ფუნქციონალური ანალიზის ერთ–ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა ფუნქციური სივრცეების შეუღლებული სივრცის აღწერა. ჯონგეს მიერ Ep De Jongel [2] ნაჩვენები იყო, რომ $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ზომად სივრცეზე განსაზღვრული X ფუნქციური სივრცის შეუღლებული X^* სივრცე იშლება რეგულარულ და სინგულარულ ნაწილთა საშუალებით, ანუ

$$X^* = X^*_C \oplus X^*_S,$$

სადაც X^*_C არის X–ზე განსაზღვრული რეგულარული ფუნქციონალები (ფუნქციონალები, რომელთა წარმოდგენა შესაძლებელია $\int\limits_{\Omega} f(t)g(t)\,d\mu(t)$ ინტეგრალის საშუალებით, $f \in X$, $d\mu$–ზომის მიმართ), ხოლო X^*_S არის X^*_C–ის პირდაპირი დამატება X^*–მდე, ანუ ისეთი ფუნქციონალები, რომელთაც არ გააჩნია ინტეგრალური წარმოდგენა. აღნიშნული ტიპის წარმოდგენის კლასიკური მაგალითია იოსიდა—ჰიუტის თეორემა [3] $(L^\infty[0,1])^*_S$ სივრცის წარმოდგენის შესახებ. კერძოდ,

$$(L^\infty[0,1])^*_S = L^1[0,1] \oplus (L^\infty[0,1])^*_S,$$

სადაც $(L^\infty[0,1])^*_S$ არის $[0,1]$–ზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი ν–წმინდად სასრული ადიციური ზომათა კლასი.

ორლიჩის სივრცეებისთვის აღნიშნული საკითხი შესწავლილი იყო ანდოს მიერ [1]. მან გამოიყენა თვისება, რომ L^*_M ორლიჩის სივრცის შეუღლებული სივრცე $(L^*_M)_S$ აკმაყოფილებს აბსტრაქტული L–სივრცის თვისებას (კაკუტანის აზრით). ჯონგეს მიერ [2] ნაჩვენები იყო შემდეგი: იმისათვის, რომ ზემოთ განხილული იზომორფიზმი დავამყაროთ X^*_S–სა და წმინდად სასრულად ადიციურ ზომათა რაიმე ქვესივრცეს შორის აუცილებელი

და საკმარისია, რომ X^* იყოს აბსტრაქტული L–სივრცე. ასევე ჯონგეს მიერ შემოღებული იქნა ნახევრად M–სივრცის ცნება, (semi–M–space)), რომლის საშუალებითაც მტკიცდება მსგავსი წარმოდგენის არსებობა.

წინამდებარე ნაშრომში მოყვანილია კლასიკური შედეგები და ასევე გამოკვლეულია $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცისთვის შეუღლებული სივრცის სინგულარული ნაწილი.

თავი I

წმინდად სასრულად ადიციური ზომები

1.1 ზოგიერთი ძირითადი დებულება წმინდად სასრულად ადიციური ზომების შესახებ

განსაზღვრება 1.1.1. განვიხილოთ რაიმე ზოგადი X სიმრავლე. X–ის ქვესიმრავლეთა M ოჯახს, რომელიც ჩაკეტილია სასრული გაერთიანებისა და დამატების მიმართ ვუწოდოთ X–ზე განსაზღვრული ალგებრა. M–ალგებრის მომცველი უმცირეს სიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა გაერთიანებისა და დამატების მიმართ აღვნიშნოთ $\overline{M}$–ით. $\overline{M}$–ს უწოდებენ M–ალგებრაზე მოჭიმულ უმცირეს σ–ალგებრას.

შენიშვნა 1.1.1. ასეთი თვისების მქონე $\overline{M}$ ყოველთვის არსებობს. მართლაც, თუ განვიხილავთ M–ის მომცველ ყველა σ–ალგებრათა თანაკვეთას (ეს სიმრავლე არაცარიელია, რადგანაც ერთ–ერთი ასეთი σ–ალგებრა არის $2^X - X$–ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე) და გავითვალისწინებთ, რომ σ–ალგებრათა თანაკვეთა ისევ σ–ალგებრაა, მივიღებთ $\overline{M}$–ს.

განსაზღვრება 1.1.2. განვიხილოთ ცალსახა, ნამდვილი ϕ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია M–ზე და აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

(1) $-\infty < \phi(A) < +\infty, \forall A \in M$;

(2) $\phi(\varnothing) = 0$;

(3) $\sup\limits_{A\in M} |\phi(A)| < +\infty$;

(4) $\phi(A\cup B) = \phi(A) + \phi(B)\; \forall A, B \in M$ ისეთი, რომ $A \cap B = \varnothing$,

მაშინ ასეთ ϕ ფუნქციას ვუწოდებთ M–ზე განსაზღვრულ სასრულად ადიციურ ზომას. განხილულ ზომათა სიმრავლეს, ფიქსირებული X–თვის და M–თვის აღვნიშნავთ $\Phi(X, M)$–ით ან უბრალოდ Φ–ით.

განსაზღვრება 1.1.3. დავუშვათ $\psi \in \Phi$ და განვიხილოთ ჩალაგებულ სიმრავლეთა

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$$

ქრობადი მიმდევრობა. თუ

$$\lim_{n\to\infty} \psi(A_n) = 0,$$

მაშინ ψ ფუნქციას ვუწოდოთ თვლადიდ ადიციური ზომა.

ძირითადად, სამეცნიერო ლიტერატურაში თვლადად ადიციური ზომა განიმარტება შემდეგნაირად: ყოველი თანაუკვეთი $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ მიმდევრობისთვის ისეთის, რომ $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in M$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

შევნიშნოთ, რომ რეალურად ეს ორი განმარტება ერთმანეთის ეკვივალეტურია.

ჩვენ უკვე შემოვიღეთ σ–ალგებრის და მასზე განსაზღვრულ ზომათა ცნება, ანუ ზომადი სივრცე. ახლა შემოვიტანოთ დალაგების ცნება Φ–ში, რომელიც მას გადააქცევს მესერად. შევნიშნოთ, რომ, თუ Φ ზომათა სიმრავლეზე შემოვიტანთ შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციებს შემდეგნაირად:

$$\forall\, \phi \in \Phi \;\text{ და }\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha\phi)(E) = \alpha \cdot \phi(E)$$

და

$$\forall\, \phi, \gamma \in \Phi, \;\; (\phi + \gamma)(E) = \phi(E) + \gamma(E), \;\; \forall\, E \in M,$$

მაშინ Φ იქცევა წრფივ სივრცედ.

განსაზღვრება 1.1.4. ყოველი $\phi \in \Phi$-თვის ვიტყვით, რომ

$$\phi \geq 0, \quad \text{თუ} \quad \phi(E) \geq 0, \quad \forall\, E \in M\text{-თვის}.$$

ანალოგიურად $\forall\, \phi, \gamma \in \Phi$ ზომებისთვის,

$$\phi \geq \gamma, \quad \text{თუ} \quad \phi(E) \geq \gamma(E), \quad \forall\, E \in M.$$

ზემოთ მოყვანილი დალაგების მიმართ შეგვიძლია Φ განვიხილოთ, როგორც მესერი. უდიდესი ქვედა საზღვარი და უმცირესი ქვედა საზღვარი γ და ϕ ზომებისა შეგვიძლია მივუთითოთ შემდეგი ცხადი სახით

$$(\phi \wedge \gamma)(E) = \inf_{T \subset E, T \in M} \big(\phi(T) + \gamma(E \cap T')\big),$$

შესაბამისად,

$$\phi \vee \gamma = -\big((-\phi) \wedge (-\gamma)\big).$$

გარკვეულ სიტუაციებში მოსახერხებელია ϕ ზომის წარმოდგენა დადებითი ნაწილთა სხვაობის სახით. ამისთვის ϕ_+-ით და ϕ_--ით აღვნიშნოთ სიმბოლოებით:

$$\phi \vee 0 \quad \text{და} \quad (-\phi) \vee 0,$$

შესაბამისად, ანუ

$$\phi_+ = \phi \vee 0, \quad \phi_- = (-\phi \vee 0).$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\phi = \phi_+ - \phi_- \quad \text{და} \quad \phi_+ \wedge \phi_- = 0.$$

აღნიშნული წარმოდგენა დაგვეხმარება ნებისმიერი ნიშნის ϕ-ზომა გამოვიკვლიოთ მის დადებით ϕ_+, ϕ_- ნაწილთა საშუალებით.

განსაზღვრება 1.1.5. დავუშვათ $\phi \in \Phi$ და $\phi \geq 0$. თუ ყოველი თვლადად ადიციური ψ ზომისთვის, რომლისთვისაც $0 \leq \psi \leq \phi$ გამომდინარეობს, რომ $\psi = 0$, მაშინ ასეთ ϕ-ზომას ვუწოდოთ წმინდად სასრულად ადიციური, ხოლო ნებისმიერი ნიშნის მქონე ϕ-ზომისთვის, ϕ-ს ეწოდება წმინდად სასრულად ადიციური, თუ ასეთებია ϕ_+ და ϕ_-.

განვიხილოთ რამდენიმე ძირითადი თვისება წმინდად სასრულად ადიციური და თვლადად ადიციურ ზომებთან დაკავშირებით.

თეორემა 1.1.1. თუ ψ_1 და ψ_2 არის თვლადად ადიციური ზომები, მაშინ $\psi_1+\psi_2$, $\psi_1\wedge\psi_2$, $\psi_1\vee\psi_2$ და $\alpha\cdot\psi_1, \forall\,\alpha\in\mathbb{R}$ ასევე σ–ადიციური ზომებია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\psi_1+\psi_2$ $\alpha\cdot\psi_1$ ზომათა σ–ადიციურობის დამტკიცება სირთულეს არ წარმოადგენს. ჩვენ მსჯელობას ჩავატარებთ $\psi_1\wedge\psi_2$–ზომისთვის (ანალოგიური მეთოდით დამტკიცდება $\psi_1\vee\psi_2$–ის σ–ადიციურობა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\phi\vee\gamma=-((-\phi)\wedge(-\gamma))$ და ϕ–ზომის σ ადიციურობიდან გამომდინარეობს $-\phi$–ს ადიციურობა). განვიხილოთ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა M–დან ისეთი, რომ

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$$

და

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

რადგან

$$(\psi_1\wedge\psi_2)(A)\le\min\big(\psi_1(A),\psi_2(A)\big)\Longrightarrow\liminf_{n\to\infty}(\psi_1\wedge\psi_2)(A_n)\le 0.$$

დავუშვათ, რომ

$$\liminf_{n\to\infty}(\psi_1\wedge\psi_2)(A_n)<0.$$

მაშინ, ცხადია, არსებობს ნამდვილი $t<0$ რიცხვი და ნატურალურ რიცხვთა $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $(\psi_1\wedge\psi_2)(A_{nk})<t$. მეორეს მხრივ, შეგვიძლია მოვიძიოთ $T_{n_k}\in M$,

$$T_{n_k}\subset A_{n_k}\ \text{ და }\ \psi_1(T_{n_k})+\psi_2(A_{n_k}\cap T'_{n_k})<t.$$

მაშასადამე, არსებობს ინდექსთა უსასრულო სიმრავლე, რომლისთვისაც

$$\psi_1(T_{n_k})<\frac{t}{2}\ \text{ ან }\ \psi_2(A_{n_k}\cap T'_{n_k})<\frac{t}{2}\,.$$

მაშასადამე, შემდეგი ორი მიმდევრობიდან $\{\psi_1(T_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ და $\{\psi_2(A_{n_k} \cap T'_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ ერთი მაინც შეიცავს უსასრულო ქვემიმდევრობას, რომლის წევრებიც ნაკლებია $\frac{t}{2}$–ზე. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ თვისებას, რომ ψ_1 და ψ_2 არის σ–ადიციური ზომები. □

მოვიყვანოთ რამდენიმე ელემენტარული დებულება, რომელთაც გამოვიყენებთ შემდეგში ძირითადი თეორემის დასამტკიცებლად.

თეორემა 1.1.2. განვიხილოთ არაუარყოფითი ϕ–ზომა, $\phi \in \Phi$. იმისთვის, რომ ϕ იყოს წმინდად სასრულად ადიციური აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\forall\, \psi \in \Phi$ σ–ადიციური ზომისთვის $\phi \wedge \psi = 0$, სადაც $\psi \geq 0$.

თეორემა 1.1.3. დავუშვათ $\phi \in \Phi$ და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\psi_1,\ \psi_2\ \ \sigma\text{–ადიციური ზომისთვის}\ \ \psi_1 \leq \phi \leq \psi_2.$$

მაშინ ϕ არის σ ადიციური.

აღნიშნული თვისების გამოვიყენებით ვაჩვენეთ, რომ წმინდად ადიციურ ზომათა კლასი ჩაკეტილია $+$, $\wedge$ და სკალარზე ნამრავლის ოპერაციის მიმართ.

თეორემა 1.1.4. დავუშვათ π_1 და π_2 არის წმინდად სასრულად ადიციური ზომები. მაშინ $\pi_1 + \pi_2, \pi_1 \vee \pi_2, \pi_1 \wedge \pi_2$ ასევე წმინდად სასრულად ადიციურია. ამასთანავე, ყოველი ϕ წმინდად სასრულად ადიციური ზომისთვის და $\forall\, \alpha\ \in\ \mathbb{R}$–თვის $\alpha \cdot \phi$ არის წმინდად სასრულად ადიციური.

დამტკიცება. საწყის ეტაპზე განვიხილოთ ისეთი π_1 და π_2, რომლებისთვისაც $\pi_1 \geq 0$ და $\pi_2 \geq 0$. თეორემა 1.1.2–ის ძალით $\pi_1 + \pi_2$–ზომის წმინდად სასრულად ადიციურობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\forall\, \psi\ \in\ \Phi$ σ–ადიციური არაუარყოფითი ზომისთვის სამართლიანია

$$\begin{aligned}&(\pi_1 + \pi_2) \wedge \psi = 0\\ &\qquad\Longrightarrow (\pi_1 + \pi_2) \wedge \psi(E) = \inf_{A \subset E,\, A \in M} \Big[\pi_1(A) + \pi_2(A) + \psi(E \cap A')\Big].\end{aligned}$$

განვიხილოთ ნებისმიერად $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$ დადებითი რიცხვები. რადგანაც

$$\pi_1 \wedge \psi = \pi_2 \wedge \psi = 0 \Longrightarrow \exists\, A_1, A_2 \subset E \;\; (A_1, A_2 \in M)$$

ისეთი, რომ

$$\pi_1(A_1) < \varepsilon_1, \;\; \pi_2(A_2) < \varepsilon_2, \;\; \psi_1(A_1') < \varepsilon_1', \;\; \psi_2(A_2') < \varepsilon_2'.$$

მაშასადამე,

$$\pi_1(A_1 \cap A_2) + \pi_2(A_1 \cap A_2) + \psi\big((A_1' \cup A_2') \cap E\big) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1' + \varepsilon_2'.$$

მეორეს მხრივ, რადგან $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$ ნებისმიერად აღებული დადებითი რიცხვებია მივიღებთ, რომ

$$\pi_1(A_1 \cap A_2) + \pi_2(A_1 \cap A_2) + \psi(A_1' \cup A_2') \cap E)$$

შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე $\forall\, \psi \in \Phi$, σ–ადიციური არაუარყოფითი ზომისთვის. მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\pi_1 + \pi_2$ არის წმინდად სასრულად ადიციური ზომა. შევნიშნოთ, რომ თუ π_1 და π_2 წმინდად სასრულად ადიციური ზომებია, მაშინ ასეთივეა $(\pi_1 \vee 0)$ და $(\pi_2 \vee 0)$. მეორეს მხრივ,

$$(\pi_1 + \pi_2) \vee 0 \leq \pi_1 \vee 0 + \pi_2 \vee 0.$$

მაგრამ, რადგან ჯამისთვის ზემოთ უკვე დავამტკიცეთ, თუ გამოვიყენებთ თეორემა 1.1.2–ს, მივიღებთ, რომ $(\pi_1+\pi_2)\vee 0$ ასევე წმინდად სასრულად ადიციური ზომაა. ანალოგიურად,

$$-\big((\pi_1 + \pi_2) \wedge 0\big) = (-\pi_1 - \pi_2) \vee 0$$

წმინდად სასრულად ადიციური ზომაა, მივიღებთ, რომ ნებისმიერი ნიშნისთვის $\pi_1 + \pi_2$ არის წმინდად სასრულად ადიციური ზომა. შევნიშნოთ, რომ ყოველი π_1 და π_2 წმინდად სასრულად ადიციური ზომებისთვის

$$(\pi_1 \vee \pi_2) \vee 0 = (\pi_1 \vee 0) \vee (\pi_2 \vee 0),$$

ასევე

$$(\pi_1 \vee \pi_2) \wedge 0 = (\pi_1 \wedge 0) \wedge (\pi_2 \wedge 0).$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$-((\pi_1 + \pi_2) \wedge 0) = (-\pi_1 - \pi_2) \vee 0$$

მივიღებთ, რომ $\pi_1 \vee \pi_2$ და $\pi_1 \wedge \pi_2$ ორივე წმინდად სასრულად ადიციური ზომაა. დასამტკიცებელი დაგვრჩა სკალარზე ნამრავლის შემთხვევა. რადგან

$$(\alpha\pi \wedge \psi)(E) = \inf_{A \subset E,\, A \in M} \big(\alpha\pi(A) + \psi(E \cap A')\big) = 0$$

როდესაც $\pi \geq 0$ და ψ არის σ ადიციური, მივიღებთ დასამტკიცებელს დადებითი π–თვის. ხოლო ნებისმიერ ნიშანზე გადავალთ, თუ π–ს ნაცვლად განვიხილავთ მის შემდეგ წარმოდგენას $\alpha\pi_+ - \alpha\pi_-$. □

როგორც ვიცით, ზომის ზოგად თეორიაში არსებითი ამოცანაა ზომის გაგრძელების საკითხი. გარკვეული კლასიკური ზომებისთვის ეს გაგრძელება შესწავლილია. განვიხილოთ იგივე საკითხი წმინდად სასრულად ადიციური ზომისთვის.

თეორემა 1.1.5. არაუარყოფითი $\phi \in \Phi$ ზომა წმინდად სასრულად ადიციურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი არაუარყოფითი σ–ადიციური ψ–თვის, ყოველი $A \in M$ და $\alpha, \beta > 0$ რიცხვებისთვის არსებობს

$$T \subset A, \;\; T \in M, \;\; \psi(T) < \alpha \;\; \text{და} \;\; \phi(A \cap T') < \beta.$$

აღნიშნული თეორემა უშუალოდ გამომდინარეობს წმინდად სასრულად ადიციური ზომის განმარტებიდან და ზემოთ მოყვანილი წმინდად სასრულად ადიციურობის კრიტერიუმიდან.

თეორემა 1.1.6. დავუშვათ $M = \overline{M}$. ვიგულისხმოთ ასევე, რომ π არის არაუარყოფითი წმინდად სასრულად ადიციური ზომა და ψ არის ასევე არაუარყოფითი, მხოლოდ σ–ადიციური ზომა $\overline{M}$ σ–ალგებრაზე. მაშინ ყოველი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $A \in M$ ისეთი, რომ $\pi(A') = 0$, ხოლო $\psi(A) < \varepsilon$.

დამტკიცება. რადგან π აკმაყოფილებს თეორემა 1.1.5–ში მოთხოვნილ პირობას, მივიღებთ, რომ არსებობს $A_1 \in M, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \phi \in M$ σ–ადიციური არაუარყოფითი

ზომისთვის

$$\psi(T) < \alpha \ \text{ და } \ \phi(A \cap T') < \beta.$$

მაშასადამე, პირობის ძალით

$$\pi(T) + \pi(T' \cap A) = \pi(A) \Longrightarrow \pi(T) = \pi(A) - \pi(T' \cap A) > \pi(A) - \beta.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ნამდვილ რიცხვთა ისეთი დადებითწევრები–ანი მიმდევრობა, რომლისთვისაც გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

განვიხილოთ სრული X სივრცე და $D_1 \in M$ ისეთი, რომ

$$\pi(D_1) < \frac{\pi(X)}{2} \ \text{ და } \ \psi(D_1') < \varepsilon_1.$$

D_1' აღვნიშნოთ A_1–ით. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\pi(A_1) > \frac{\pi(X)}{2} \ \text{ და } \ \psi(A_1) < \varepsilon_1.$$

თუ განვიხილავთ ანალოგიური კონსტრუქციით მოცემულ A_1' სიმრავლეს (თეორემა 1.1.5), მაშინ არსებობს $D_1 \subset A_1'$, $D_2 \in M$ და

$$\pi(D_2) < \frac{\pi(A_1')}{2}\,.$$

ასევე $\psi(D_2' \cap A_1') < \varepsilon_2$. შევნიშნოთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$\pi(D_2' \cap A_1') > \frac{\pi(A_1')}{2}\,.$$

$D_1' \cap A_1'$ აღვნიშნოთ A_2–ით. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\pi(A_2) \geq \frac{\pi(A_1')}{2} \ \text{ და } \ \psi(A_2) < \varepsilon_2.$$

ცხადია, რომ

$$\begin{aligned}\pi(A_1 \cup A_2) &= \pi(A_1) + \pi(A_2) > \pi(A_1) + \frac{\pi(A_1')}{2} \\ &= \pi(A_1) + \frac{\pi(X) - \pi(X_1)}{2} = \frac{\pi(X)}{2} + \frac{\pi(A_1)}{2} > \frac{\pi(X)}{2} + \frac{\pi(X)}{4}\,.\end{aligned}$$

თუ აღნიშნულ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ სიმრავლეთა $A_1, \ldots, A_n$ მიმდევრობას σ–ალგებრიდან

$$\pi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \pi(A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\pi(X) = (1-2^{-n})\pi(X)$$

თვისებით. ასევე გვექნება, რომ

$$\psi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) < \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n.$$

ცხადია, იგივე მოსაზრების ძალით არსებობს $D_{n+1} \in M$ ისეთი, რომ

$$D_{n+1} \subset (A_1 \cup \cdots \cup A_n)'.$$

ასევე

$$\pi(D_{n+1}) < \frac{\pi((A_1 \cup \cdots \cup A_n)')}{2} \ \text{ და } \ \psi\big(D'_{n+1} \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)'\big) < \varepsilon_{n+1},$$
$$A_{n+1} = D'_{n+1} \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)'.$$

და სრულდება შემდეგი უტოლობები,

$$\pi(A_{n+1}) > \frac{\pi((A_1 \cup \cdots \cup A_n)')}{2}, \quad \psi(A_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}.$$

ინდუქციის ძალით შეგვიძლია ავაგოთ ასეთი ტიპის $\{A_n\}$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც როგორც ვნახეთ, სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\begin{aligned}
\pi(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \pi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \pi(A_{n+1}) \\
&> \pi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \frac{\pi(A_1 \cup \cdots \cup A_n)'}{2} \\
&\geq (1-2^{-n})\pi(X) + (1-2^{-n}) \cdot \frac{\pi(X)}{2} = (1-2^{-(n+1)}) \cdot \pi(X).
\end{aligned}$$

შესაბამისად,

$$\psi(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) < \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i.$$

ანუ აღნიშნული მეთოდით მივიღეთ თანაუკვეთი $\{A_n\}_{n+1}^{\infty}$ მიმდევრობა $\overline{M}$–დან, რომლისთვისაც გვაქვს

$$\pi(A) > (1-2^{-n}) \cdot \pi(X)$$

სადაც $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. მაშასადამე, $\pi(A) = \pi(X)$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\pi(A') = 0$. მეორეს მხრივ, რადგან ψ არის σ ადიციური ზომა, გვაქვს

$$\psi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon. \quad \square$$

შენიშვნა 1.1.2. თეორემა 1.1.5 არ არის მართებული, თუ $M \neq \overline{M}$. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. X-ით აღვნიშნოთ $[0,1)$ სიმრავლე, ხოლო M იყოს $[\alpha,\beta)$ ნახევრად ღია ინტერვალებზე მოჭიმული უმცირესი ალგებრა. ω იყოს C-ზე (C-თი აღვნიშნავთ კანტორის სიმრავლეს) განსაზღვრული ლებეგის სინგულარული ზომა, ხოლო λ ლებეგის ჩვეულებრივი (კლასიკური) ზომაა. მოვიყვანოთ კონსტრუქციას, რომლითაც ω იქნება გაცილებით დიდ კლასზე განსაზღვრულ, ვიდრე M ალგებრაა და ω-ზომას შეზღუდვა M-ზე იქნება σ-ადიციური, რომელიც მიიღებს მნიშვნელობებს მხოლოდ 0-სა და 1-ს.

განვიხილოთ ნებისმიერი ნამდვილი t რიცხვი, $0 \leq t \leq 1$. მაშინ არსებობს წმინდად სასრულად ადიციური ξ_t ზომა, რომელიც განსაზღვრულია λ-ზომად $[0,1]$-ის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაზე და იღებს მნიშვნელობებს $\{0,1\}$-დან; $\xi_t(N) = 0$, თუ $\lambda(N) = 0$, $\xi_t(I) = 1$, თუ I არის რაიმე ღია ინტერვალი, რომლისთვისაც $t \in I$. განვიხილოთ $C' \cap [0,1)$ სიმრავლის რაიმე თვლადი მკვრივი $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ ქვესიმრვლე. დავუშვათ, $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{t_n}}{2^n}$. შევნიშნოთ, რომ ξ არის წმინდად სასრულად ადიციური ზომა λ-ზომად სიმრავლეთა კლასზე და ასეთივე იქნება მისი შეზღუდვა M-ზე. განვიხილოთ რაიმე სიმრავლე $A \in M$ ისეთი, რომ $\xi(A) = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $t_{n_k} \in A, \forall\, k \in \mathbb{N}$. მაშასადამე,

$$\overline{A} \supset \{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \overline{C}\,' = [0,1).$$

მეორეს მხრივ,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i) \;\text{ და }\; \overline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i].$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A' არის სასრული სიმრავლე, მაგრამ, რადგან M ალგებრას ერთადერთი სასრული სიმრავლე არის $\varnothing$, მივიღებთ, რომ $A' = \varnothing$. ეს კი ნიშნავს,

რომ $A = [0, 1)$ და $\omega(A) = 1$.

თეორემა 1.1.7. დავუშვათ $M = \overline{M}$. თუ π არის წმინდად სასრული ადიციური ისეთი, რომ $\pi \geq 0$, ასვე ψ არის σ–ადიციური არაუარყოფითი ზომა, მაშინ არსებობს ჩალაგებუ–ლი კლებადი $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ მიმდევრობა M–დან ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \psi(B_n) = 0 \ \text{ და } \ \pi(B_n) = \pi(X), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ასევე სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

დამტკიცება. თეორემა 1.1.5–ის ძალით არსებობს $C_n \in M$ ისეთი, რომ

$$\pi(C_n) = \pi(X) \ \text{ და } \ \psi(C_n) < \frac{1}{n}\,.$$

B_n სიმრავლე ავაგოთ შემდეგნაირად

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} C_i.$$

ცხადია, რომ

$$\psi(B_n) \leq \psi(C_n) < \frac{1}{n}\,,$$

ასევე

$$\pi(B_n') \leq \pi(C_1') + \cdots + \pi(C_n') = 0.$$

მაშასადამე, $\pi(B_n) = \pi(X)$. □

დაბოლოს, განვიხილოთ ძირითადი შედეგი, რომელიც ამბობს, რომ ყოველი სასრულად ადიციური $\phi \in \Phi$ ზომა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წმინდად სასრული ადიციური და σ–ადიციური ნაწილების ჯამის სახით.

თეორემა 1.1.8. განვიხილოთ არაუარყოფითი სასრულად ადიციური $\phi \in \Phi$ ზომა, მაშინ არსებობს $\phi_c \geq 0$ და $\phi_p \geq 0$ ზომები, სადაც ϕ_c არის თვლადად ადიციური, ხოლო ϕ_p არის წმინდად სასრულად ადიციური და ადგილი აქვს $\phi = \phi_c + \phi_p$ წარმოდგენას.

დამტკიცება. დავუშვათ Γ არის სიმრავლე ყველა თვლადად ადიციური γ–ზომებისა Φ–დან, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: $0 \leq \gamma \leq \varnothing$. ნამდვილი α რიცხვი

განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\alpha = \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(X).$$

ცხადია, $0 \le \alpha \le \phi(X) < +\infty$. ზემოთ მოყვანილი ტოლობის ძალით შეგვიძლია შევარჩიოთ $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა Γ-დან ისეთი, რომ $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(X) = \alpha$. $\overline{\gamma}_n$ განვმარტოთ შემდეგნაირად $\overline{\gamma}_n = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_n$. როგორც უკვე ვიცით $\overline{\gamma}_n$ იქნება σ–ადიციური ზომა. რასაკვირველია, თითოეული $\overline{\gamma}_n$ შეგვიძლია გავაგრძელოთ $\overline{M}$ ისე, რომ შენარჩუნდეს შემდეგი დალაგება

$$\overline{\gamma}_1 \le \overline{\gamma}_2 \le \overline{\gamma}_3 \le \cdots \le \overline{\gamma}_n \le \cdots.$$

გარდა ამისა $\forall\, E \in \overline{M}$ სიმრავლისთვის სასრული იქნება შემდეგი ზღვარი $\lim_{n\to\infty} \overline{\gamma}_n(E)$. აღვნიშნოთ ეს ზღვარი $\phi_c(E)$–ით ანუ

$$\phi_c(E) = \lim_{n\to\infty} \overline{\gamma}_n(E).$$

შეგვიძლია ვაჩვენოთ (ნიკოდიმის თეორემა), რომ ϕ_c ზომის შეზღუდვა M–ზე იქნება σ–ადიციური. განვიხილოთ სიმრავლური $\phi_p = \phi - \phi_c$ ფუნქცია. რასაკვირველია, $\phi_p \ge 0$. დასამტკიცებელი დაგვრჩა, რომ ϕ_p არის წმინდად სასრულად ადიციური. მართლაც, დავუშვათ ψ არის σ–ადიციური ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს $0 \le \psi \le \phi - \phi_c$ უტოლობას. აქედან მივიღებთ შემდეგს

$$\phi_c \le \psi + \phi_c \le \phi.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო $\psi \ne 0$. მაშინ

$$\psi(X) > 0 \ \text{ და } \ (\psi + \phi_c)(X) > \phi_c(X) = \alpha.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. $\square$

1.2 L^∞–სივრცის შეუღლებული სივრცის ქვეისვრცე. იოსიდა—ჰიუიტის თეორემა

პარაგრაფ 1.1 მოყვანილი თეორემების გამოყენებით შეგვიძლია შევისწავლოთ წრფივი ფუნქციონალების წარმოდგენა L_∞–სივრცესა და ორლიჩის სივრცეებში.

განსაზღვრება 1.2.1. განვიხილოთ ნებისმიერი T სიმრავლე და მასზე განსაზღვრული M σ–ალგებრა. $\widetilde{N}$–ით აღვნიშნოთ M–ჯახის საკუთრივი ქვესიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია თვლადი გაერთიანების მიმართ და ამავდროულად აკმაყოფილებს შემდეგ დამატებით თვისებას:

$$\forall\, N \in \widetilde{N}\text{-თვის},\quad A \subset T \;\; \text{და} \;\; A \subset N \Longrightarrow A \in \widetilde{N}.$$

ყოველი M–ზომადი ნამდვილი ფუნქციისთვის შემოვიტანოთ შემდეგი ტიპის ნორმა:

$$\|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|x|.$$

სადაც მარჯვნივ გვაქვს არსებითი სუპრემუმი, რომელიც შმდეგნაირად გაიგება, ეს არის იმ ნამდვილ $\{\alpha\}$–რიცხვების inf, რომლისთვისაც

$$\big\{t:\; |x(t)| < \alpha\big\} \in \widetilde{N},\;\; \text{თუ} \;\; \big\{t:\; |x(t)| < \alpha\big\} \neq \varnothing$$

და

$$\|x\|_\infty = +\infty,\;\; \text{თუ} \;\; \big\{t:\; |x(t)| < \alpha\big\} = \varnothing.$$

თუ აღნიშნულ სივრცეში სკალარზე ნამრავლისა და შეკრების ოპერაციებს შემოვიღებთ ბუნებრივად, გარდა ამისა, ორ x და x' ელემენტს აღნიშნული სივრციდან გავაიგივებთ იმ პირობით, თუ $\|x - x'\|_\infty = 0$, მაშინ L_∞ გადაიქცევა ბანახის ნამდვილ სივრცედ. პირველი თეორემა წრფივი ფუნქციონლის წარმოდგენასთან დაკავშირებით შემდეგნაირად ყალიბდება.

თეორემა 1.2.1. განვიხილოთ ნამდვილი ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია L_∞ სივრცეზე და ამავდროულად არის წრფივი, ანუ:

(1) $F(x+y) = F(x) + F(y), \forall\, x, \forall\, y \in L_\infty$;

(2) $F(\alpha x) = \alpha F(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in L_\infty$;

(3) $|F(x)| \leq A\|x\|_\infty, \exists\, A \geq 0, \forall\, x \in L_\infty$,

მაშინ არსებობს სასრულად ადიციური ზომა $\phi \in \Phi$ ისეთი, რომ

$$F(x) = \int_T x(t)\, d\phi(t), \quad \forall\, x \in L_\infty.$$

ასევე $\phi(N) = 0, \forall\, N \in \widetilde{N}$. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც: თუ ϕ არის სასრულად ადიციური ზომა ისეთი, რომ $\phi(N) = 0, \forall\, N \in \widetilde{N}$ სიმრავლისთვის, მაშინ ის განსაზღვრავს წრფივ, შემოსაზღვრულ $F(x) = \int\limits_T x(t)\, d\phi(t)$ ფუნქციონალს. ამავდროულად $\forall\, F \in L(L_\infty, \mathbb{R})$ და $\forall\, \phi \in \Phi$–ზომისთვის

$$\|F\| = \phi_+(T) + \phi_-(T) \equiv |\phi|(T).$$

შენიშვნა 1.2.1. ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალის კონსტრუირება შეგვიძია ლებეგის ინტეგრალის ანალოგიურად σ–ადიციური ϕ–ზომის შემთხვევაში.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერად აღებული წრფივი ფუნქციონალი L_∞ სივრცეში, თუ $\chi_{_E}$–ით აღვნიშნავთ $E \in M$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას, მაშინ გვაქვს შემდეგი

$$\|\chi_{_E}\| = 0, \quad \text{თუ} \;\; E \in \widetilde{N}$$

და

$$\|\chi\|_\infty = 1, \quad \text{თუ} \;\; E \notin \widetilde{N}.$$

აქედან გამომდინარე $F(\chi_{_E}) = \phi(E)$. ცხადია $\forall\, E \in M$ სიმრავლისთვის $\phi(E)$ არის ნამდვილი რიცხვი, ϕ არის სასრულად ადიციური M–ზე და $|\phi(E)| \leq A, \forall\, E \in M$. განვიხილოთ ნებისმიერი ელემენტი L_∞–დან, $x(t) \in L_\infty$. $\alpha = \operatorname{ess\,inf} x(t)$, ხოლო $b = \operatorname{ess\,sup} x(t)$. A_i იყოს შემდეგი სიმრავლე

$$\begin{aligned} A_i = \Big\{ t :\ t \in T,\ n^{-1}\big[(n-i)\cdot a + i \cdot b\big] \\ \leq x(t) < n^{-1}\big[(n-i-1)\cdot a + (i+1)\cdot b\big],\ i \in \{0, \ldots, n-2\} \Big\}, \end{aligned}$$

ხოლო

$$A_{n-1} = \Big\{ t : \ t \in T, \ n^{-1}\big[(n-1)\cdot b + a\big] \le x(t) \le b \Big\}.$$

შემოვიღოთ ასევე შემდეგი ტიპის მარტივი ფუნქცია

$$p_n = \sum_{i=1}^{n-1} n^{-1}\big[(n-i)\cdot a + i \cdot b\big] \cdot \chi_{A_i}.$$

ცხადია, აგებიდან სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|p_n - x\|_\infty \le n^{-1}(b-a).$$

მეორეს მხრივ,

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(p_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} n^{-1}\big[(n-i)\cdot a + i\cdot b\big] \cdot \phi(A_i) = \int_T x(t)\, d\phi(t).$$

მივიღეთ, რომ F-ს აქვს შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა

$$F(x) = \int_T x(t)\, d\phi(t).$$

ახლა განვიხილოთ F-ის ნორმა

$$\|F\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} |F(x)|.$$

ϕ წარმოდგენიდან $\phi = \phi_+ - \phi_-$, $\phi_+ \wedge \phi_- = 0$. ϕ_+ და ϕ_- ზომების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\forall\, \varepsilon > 0$ რიცხვისთვის $\exists\, A \subset T$ ისეთი, რომ

$$\phi_+(A') < \varepsilon \ \text{ და } \ \phi_-(A) < \varepsilon.$$

$g = \chi_A - \chi_{A'}$. ცხადია $g \in L_\infty$. გარდა ამისა,

$$\|g\|_{L_\infty} \le 1 \Longrightarrow F(g) = \int_T g(t)\, d\phi_+(t) - \int_T g(t)\, d\phi_-(t)$$
$$= \int_A g(t)\, d\phi_+(t) + \int_{A'} g(t)\, d\phi_+(t) - \int_A g(t)\, d\phi_-(t) - \int_{A'} g(t)\, d\phi_-(t)$$

$$= \phi_+(A) - \phi_+(A') - \phi_-(A) + \phi_-(A') > \phi_+(A) + \phi_-(A') - 2\varepsilon$$
$$> \phi_+(A) + \phi_-(A) + \phi_+(A') + \phi_-(A') - 4\varepsilon$$
$$= |\phi|(A) + |\phi|(A') - 4\varepsilon = |\phi(T)| - 4\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\|F\| \geq |\phi|(T).$$

მეორეს მხრივ, თუ $x(t) \in L_\infty$,

$$\|x\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \big\{t : |x(t)| > 1\big\} \in \widetilde{N}$$

და

$$\Big|\int\limits_T x(t)\,d\phi(t)\Big| = \Big|\int\limits_T \mathsf{max}\,\big[\,\mathsf{min}(x(t),1),-1\big]\,d\phi(t)\Big|.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $|x(t)| \leq 1, \forall\, t \in T$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Big|\int\limits_T x(t)\,d\phi(t)\Big| = \Big|\int\limits_T x(t)\,d\phi{+}(t) - \int\limits_T x(t)\,d\phi_-(t)\Big|$$
$$\leq \Big|\int\limits_T x(t)\,d\phi_+(t)\Big| + \Big|\int\limits_T x(t)\,d\phi{-}(t)\Big|$$
$$\leq \phi_+(T) + \phi_-(T) = |\phi|(T).$$

მივიღეთ დასამტკიცებელი

$$\|F\| + |\phi|(T). \quad \square$$

თეორემა 1.2.1–ის გათვალისწინებით M ალგებრაზე განსაზღვრული სასრულად ადიციური ზომა შეგვიძლია გავაიგივოთ L_∞ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ფუნქციონალთან. მაშასადამე, აქედან ცხადია, რომ M–ზე შესაძლებელია მოვიძიოთ საკმაოდ ფართო კლასი სასრულად ადიციური ზომებისა, რომლებიც ამავდროულად იქნება წმინდად სასრულად ადიციური ანუ ყოველი σ–ადიციური, არაუარყოფითი ზომა, რომელიც არ აღემატება ამ კლასის რომელიმე წარმომადგენელს, იგივურად ნულია. მეორეს მხრივ, ჰანი–ბანახის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 1.2.2. განვიხილოთ L_∞ სივრცის $x(t)$ ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\|x\|_\infty > 0$$

პირობას, მაშინ ნებისმიერად აღებულ α ნამდვილი რიცხვისთვის არსებობს სასრულად ადიციური ϕ ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებას

$$\int\limits_T x(t)\, d\phi(t) = \alpha.$$

თეორემა 1.2.3. თუ L_∞ სივრცის $x(t)$ ელემენტი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\|x\|_\infty > 0 \ \text{ და } \ \operatorname{ess\,inf} x(t) \geq 0,$$

მაშინ ნებისმიერად აღებული $\alpha \geq 0$ ნამდვილი რიცხვისთვის არსებობს არაუარყოფითი სასრულად ადიციური ϕ ზომა, რომლისთვისაც $\int\limits_T x(t)\, d\phi(t) = \alpha$.

დამტკიცება. კრეინის თეორემის გამოყენებით, რადგან

$$\|x\|_\infty > 0 \ \text{ და } \ \operatorname{ess\,inf} x(t) \geq 0,$$

მაშინ არსებობს $\delta \geq 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$E_0 = \big\{t : \ t \in T \wedge x(t) > \delta\big\} \notin \widetilde{N}.$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $y \cdot \chi_{E_0}$ ტიპის ფუნქციათა სიმრავლე, სადაც $y \in L_\infty$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს,

$$\mathbb{G} \equiv \big\{y \cdot \chi_{E_0} : \ \ y \in L_\infty\big\}.$$

ასევე

$$\mathbb{B} \equiv \big\{z \in G : \ \ z(t) \geq 0\big\}.$$

რასაკვირველია, $\|\ \cdot\ \|_\infty$ ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, ყოველი $x \cdot \chi_{E_0}$ ელემენტი B სიმრავლიდან იქნება მისი შიგა წერტილი. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ეს სიმრავლე იქნება წრფივი ნახევარჯგუფი კრეინის აზრით. ზემოთ მოყვანილი თეორემის

ძალით წრფივი $\{ax \cdot \chi_{E_0}\}_{a\in\mathbb{R}}$ ქვესივრციდან აღებული ყოველი ელემენტისთვის არსე–ბობს წრფივი ფუნქციონალი ისეთი, რომ ადგილი აქვს

$$f(ax \cdot \chi_{E_0}) = a \cdot \alpha$$

წარმოდგენას. თუ f ფუნქციონალისთვის გამოვიყენებთ კრეინის თეორემას, მაშინ მი–ვიღებთ, რომ არსებობს მისი F გაფართოება, რომლისთვისაც $F(p) \geq 0, \forall p \in B$. როგორც ვიცით ამ ფუნქციონალისთვის არსებობს სასრულად ადიციური ϕ–ზომა

$$F(y) = \int\limits_{E_0} y(t)\, d\phi(t).$$

მაშასადამე, $\forall A \in M$ და $A \subset E_0$ სიმრავლეებისთვის $0 \leq F(\chi_{E_0}) = \phi(A)$, თუ $\phi(A)$-ს როლში ავიღებთ $\phi(A \cap E_0)$-ს, მივიღებთ დასამტკიცებელს. $\square$

თავი II

ორლიჩის სივრცეები

2.1 ორლიჩის სივრცის განმარტება, პირველი და მეორე ნორმები, ამემიას ნორმა

ამ თავის ძირითდი მიზანია ვიპოვოთ წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალების ზოგა–დი სახე ორლიჩის სივრცეში. ამისთვის დაგვჭირდება I თავში მოყვანილი დებულებები რათა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალი წარმოდგება რეგულარული ფუნქციონალისა და სასრულად ადიციური ზომის ჯამის სახით, რომელიც, თავის მხრივ, იძლევა საშუალებას დავახასიათოთ ფუნქიონალის ნორმა.

განსაზღვრება 2.1.1. ნამდვილი ცვლადის ამოზნექილ ფუნქციას ვუწოდოთ N ფუნქცია, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს $M(\xi)$ — ამოზნექილია,

$$M(0) = 0, \quad M(\xi) = M(-\xi) \ \text{და} \ \lim_{\xi\to\infty} \frac{M(\xi)}{\xi} = \infty.$$

ყოველი ასეთი M ფუნქციისთვის განიმარტება მისი დამატებითი

$$\overline{M}(\xi) = \sup_{-\infty<\eta<\infty} \{\xi\eta - M(\eta)\}$$

ფუნქცია. მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ M და $\overline{M}$ ფუნქციებისთვის ადგილი აქვს

$$|\xi\eta| \le M(\xi) + \overline{M}(\eta), \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}$$

იუნგის უტოლობას.

შენიშვნა 2.1.1. წინა პარაგრაფში M–ითა და $\overline{M}$–ით აღნიშნული იყო, შესაბამისად, ალ–გებრა და σ–ალგებრა. მაგრამ, რადგან ამოზნექილ ფუნქციას აღნიშნავენ $M(\xi)$–ით, ჩვენც ვისარგებლებთ გავრცელებული სიმბოლიკით და ვიგულისხმოთ, რომ ამ პარაგ–რაფში M არის ამოზნექილი ფუნქცია, ხოლო $\overline{M}$ მისი დამატებითი ფუნქცია.

განვიხილოთ რაიმე ზოგადი Δ სიმრავლე. B იყოს Δ–ზე განსაზღვრული σ–ალგებრა, ხოლო $\mu_0 - B$–ზე განსაზღვრული არაუარყოფითი, არანულოვანი, სასრული ზომა, რო–მელიც თვლადად ადიციურია, ანუ

$$\mu(E) \geq 0, \;\; \forall\, E \in B, \;\; 0 < \mu(\Delta) < \infty,$$
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$
$$E_i \cap E_j = \varnothing, \quad \text{თუ} \;\; i \neq j.$$

ვიგულისხმოთ ასევე, რომ μ_0 სრული ზომაა. როგორც წინაპარაგრაფში Φ იყოს B –ზე განსაზღვრულ სასრულად ადიციურ ზომათა სიმრავლე

$$\nu^{+}(E) \equiv \sup_{B \ni F \subset E} \nu(F) \;\; \text{და} \;\; \nu^{-}(E) \equiv -\inf_{B \ni F \subset E} \nu(F).$$

მოცემული აღნიშვნების გამოყენებით $\nu = \nu^{+} - \nu^{-}$, $|\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}$. შემოვიღოთ შემდეგი ტიპის ფუნქციონალები:

$$W(f) \equiv \int M(f)\, d\mu_0, \quad \overline{W}(f) = \int \overline{M}(f)\, d\mu_0,$$

რომლის გამოყენებითაც განვსაზღვრავთ ორლიჩის L_M^* სივრცეს შემდეგნაირად:

$$L_M^* = \big\{ f : \;\; \exists\, \alpha \geq 0 \;\wedge\; W(\alpha f) < \infty \big\}.$$

რასაკვირველია, ბუნებრივად შემოღებული შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპე–რაციის მიმართ L_M^* იქნება წრფივი სივრცე. გარდა ამისა, იუნგის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\int |f \cdot g|\, d\mu_0 \leq \overline{W}(f) + W(g), \;\; \forall\, f, g \;\; (\text{ინტეგრრება ხდება სრულ } \Delta\text{–ზე}).$$

ძირითადი ნორმების შემოღებამდე ორლიჩის სივრცეში მოვყვანოთ კავშირი $\overline{W}$–სა და W–ს შორის:

$$\overline{M}(g) = \sup_{f\in L_M^*} \left\{ \int f\cdot g\, d\mu_0 - W(f) \right\}, \ \ \forall\, g\in L_{\overline{M}}^*,$$

სადაც

$$L_{\overline{M}}^* = \left\{ g: \ \ \int |f\cdot g|\, d\mu_0 < \infty, \ \ \forall\, f\in L_M^* \right\}.$$

ახლა უკვე შეგვიძლია L_M^* სივრცეში შემოვიღოთ შემდეგი ტიპის ორი ძირითადი ნორმა

1) $\|f\|_M = \sup\limits_{\overline{M}(g)\le 1} \int f\cdot g\, d\mu_0$ (პირველი ნორმა);

2) $|||f|||_M = \inf\limits_{M(\xi f)\le 1} |\xi|^{-1}$ (მეორე ნორმა).

შენიშვნა 2.1.2. პირველი ტიპის ნორმა ასევე შეგვიძლია შემოვიღოთ შემდეგნაიად:

$$\|f\|_M = \inf_{\xi>0} \frac{1+M(\xi f)}{\xi}\,.$$

მას ამემიას ნორმას უწოდებენ. მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ პირველი ნორმა და ამემიას ნორმა ერთმანეთს ემთხვევა.

ცნობილია ასევე შემდეგი ფაქტი: $\|\ \cdot\ \|_M$ და $|||\ \cdot\ |||_M$ ნორმებზე L_M^* წრფივ სივრცეს გადააქცევენ ბანახის სივრცედ. ამასთან,

$$|||f|||_M \le \|f\|_M \le 2\cdot |||f|||_M$$

არის ეკვივალენტური ნორმები.

როგორც ზემოთ გვქონდა შემოღებული სასრულად ადიციური ზომისთვის დადებითი და უარყოფითი ნაწილი, ანალოგიურად შეიძლება განიმარტოს დაშლა ფუნქციისთვის L_M^*–დან და ფუნქციონალებისთვის, რომლებიც განსაზღვრულია L_M^* სივრცეზე. მართლაც,

$$f^+(t) = \begin{cases} f(t), & f(t)\ge 0,\\ 0, & f(t)<0, \end{cases} \qquad f^-(t) = \begin{cases} -f(t), & f(t)\le 0,\\ 0, & f(t)>0, \end{cases}$$

მაშინ, ცხადია, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. ანალოგიურად,

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-,$$

სადაც

$$\varphi^+(f) = \sup_{0\le g\le f} \varphi(g) \ \text{ და } \ \varphi^-(f) = -\inf_{0\le g\le f} \varphi(g), \ \ \forall\, f \ge 0.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ყოველი $g \in L^*_{\overline{M}}$ ასახვა (ფუნქცია) შეგვიძლია განვიხილოთ წრფივ შემოსაზღვრულ ფუნქციონალად, რომელიც მოქმედებს L^*_M სივრცეში. მნიშვნელოვანია აგრეთევ ის ფაქტი, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ინტეგრალურ წარმოდგენას

$$\varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu_0$$

(შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალი, რომელიც წარმოდგენილია ინტეგრალის სახით, გარკვეული აზრით, კარგი თვისებების მატარებელია). ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით, პირველი და მეორე ნორმების გამოყენებით, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\sup_{f\ne 0} \frac{\varphi(f)}{\|f\|_M} = |||g|||_{\overline{M}} \ \text{ და } \ \sup_{f\ne 0} \frac{\varphi(f)}{|||f|||_M} = \|g\|_{\overline{M}}.$$

ამის გათვალისწინებით ქვემოთ, თუ საწინაღმდეგო არ იქნება მითითებული, ხშირად გამოვიყენებთ აღნიშვნებს:

$$\|\varphi\|_{\overline{M}} = \sup \frac{\varphi(f)}{|||f|||_M}\,, \quad |||\varphi|||_M = \sup \frac{\varphi(f)}{\|f\|_M}\,.$$

შევნიშნოთ, რომ როგორც W ფუნქციონალი, ისე ნორმა $\|\cdot\|$, $(|||\cdot|||)$ აკმაყოფილებს მონოტონურობის თვისებას, ანუ, თუ

$$|f| \le |g| \Longrightarrow W(f) \le W(g) \ \text{ და } \ \|f\|_M \le \|g\|_M \ \ \big(|||f|||_M \le |||g|||_M\big).$$

უშუალოდ წრფივი სინგულარული ფუნქციონალების წარმოდგენამდე მოვიყვანოთ ორი მნიშვნელოვანი ფაქტი, რომელიც ამყარებს კავშირს პირველ ნაწილში მოყვანილი იოსიდა—ჰიუვიტის თეორემასა და წრფივი ფუნქციონალის დაშლას შორის.

ყოველი $E \in B$ სიმრავლისა და f ფუნქციისთვის f_E სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $f \cdot \chi_E$ ფუნქცია, ანუ

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$$

E_M-ით აღვნიშნოთ არსებითად შემოსაზღვრულ ფუნქციათა კლასის ჩაკეტვა L_M^* სივრცეში (აქ ჩაკეტვა მოიაზრება L_M^* სივრცის ნორმის მიერ ინდუცირებული ტოპოლოგიით). ცხადია, E_M წრფივი სივრცეა, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ფაქტი: თუ $|g| \leq |f|$ და $f \in E_M \Longrightarrow g \in E_M$. კრიტერიუმი იმისა, თუ რა შემთხვევაში ხვდება f ფუნქცია E_M კლასში, არის შემდეგი:

$$f \in E_M \iff \text{თუ} \iff \forall\, \alpha > 0, \;\; W(\alpha f) < \infty.$$

2.2 ორლიჩის სივრცეზე განსაზღვრული სინგულარული ფუნქციონალების დახასიათება

როგორც ზომისთვის, ასევე ფუნქციონალებისთვის გვაქვს სინგულარული ფუნქციონალის ცნება. კერძოდ, φ წრფივ, შემოსაზღვრულ ფუნქციონალს ვუწოდოთ ფუნქციური ტიპის, თუ ის წარმოდგება $\varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu_0$ ინტეგრალის სახით, ხოლო φ-ის ვუწოდოთ სინგულარული ტიპის, თუ $\forall\, f \in E_M$ ფუნციონალისთვის $\varphi(f) = 0$.

თეორემა 2.2.1. ნებისმიერი წრფივი, შემოსაზღვრული φ ფუნქციონალი ერთადერთი სახით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად: $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$, სადაც φ_c არის ფუნქციური ტიპის, ხოლო φ_s — სინგულარული ტიპის.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნამდვილი $\nu(E) = \varphi(\chi_E)$ ფუნქცია, $E \in B$. ცხადია, ν არის აბსოლუტურად უწყვეტი ზომა μ_0 ზომის მიმართ. მართლაც,

$$|\varphi(\chi_{E_M})| \leq \|\varphi\|_{\overline{M}} \cdot |||\chi_{E_M}||| \longrightarrow 0, \;\; \text{როცა} \;\; \mu_0(E_M) \to 0.$$

თუ გამოვიყენებთ რადონ-ნიკოდიმის თეორემას, არსებობს ერთადერთი ინტეგრებადი g

ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\varphi(\chi_{_E}) = \int\limits_E g\, d\mu_0, \quad \forall\, E \in B.$$

თუ φ_c ფუნქციონალს განვმარტავთ შემდეგნაირად $\varphi_c(f) = \int f \cdot g\, d\mu_0$, მაშინ მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\varphi_c(f)$ არის წრფივი, შეოსაზღვრული ფუნქციონალი L_M^*–ზე. განმარტების ძალით, ცხადია, φ_c ფუნქციური ტიპისაა. φ_s–ით აღვნიშნოთ $\varphi - \varphi_c$–ით, $\varphi_s = \varphi - \varphi_c$. ცხადია, $\forall\, f \in E_M$ ფუნქციისთვის $\varphi_s(f) = 0$, ანუ მივიღეთ სასურველი $\varphi = \varphi_s + \varphi_c$ წარმოდგენა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია. მართალაც, დავუშვათ გვაქვს სხვაგვარი წარმოდგენა $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, სადაც φ_1 არის ფუნქციური ტიპის, ხოლო φ_2 სინგულარული ტიპის. რადგან

$$\varphi_c + \varphi_s = \varphi_1 + \varphi_2 \Longrightarrow \varphi_c - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_s.$$

ანუ ვღებულობთ, რომ $\varphi_c - \varphi_1$ არის როგორც ფუნქციური ისე სინგულარულიტიპის. მა–შასადამე, არსებობს მისი წარმომადგენელი h ისეთი, რომ

$$\int h\, d\mu_0 = (\varphi_c - \varphi_1)(h) = 0.$$

ანუ $\varphi_c = \varphi_1$. რ.დ.გ. □

აღნიშნული თეორემის გამოყენებით ჩვენ დავამტკიცებთ ერთ მნიშვნელოვან თვისებას, რომელიც ახასიათებს ფუნქციური ტიპის წრფივ, შემოსაზღვრულ ფუნქციონალებს.

თეორემა 2.2.2. წრფივი, შემოსაზღვრული φ ფუნქციონალი არის ფუნქციური ტიპის, მა–შინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\nu(E) = \varphi(f_E)$ ზომა არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ_0 ზომის მიმართ ყოველი $f \in L_M^*$ ფუნქციისთვის.

დამტკიცება. თეორემა 2.2.1–დან გვაქვს, რომ φ არის ფუნქციური ტიპის $\Longleftrightarrow \varphi = \varphi_c$. მაშასადამე, არსებობს g, რომლისთვისაც

$$\varphi(f_E) = \int\limits_E f \cdot g\, d\mu_0.$$

აქედან გამომდინარე ν არის უწყვეტი μ_0–ს მიმართ. განვიხილოთ პირიქით. დავუშვათ, ν ზომა არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ_0 ზომის მიმართ, $\forall\, f \in L_m^*$ ფუნქციისთვის.

განვიხილოთ $E_k = \{t : \quad |f(t)| \leq k\}$ სიმრავლე. ცხადია, $|f_{E_k}| \leq |f(t)|$. მაშინ, რადგან $\mu(\Delta - E_k) \to 0$, მივიღებთ, რომ

$$\lim_{k\to\infty} f_{E_k}(t) = f(t) \ \text{ თ.ყ.}$$

თუ გამოვიყენებთ ლებეგის თეორემას მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, მივიღებთ, რომ

$$\int_{E_k} f \cdot g \, d\mu_0 \longrightarrow \int f \cdot g \, d\mu_0 = \varphi_c(f).$$

მეორეს მხრივ, რადგან

$$\varphi(f) = \varphi(f_{E_k}) + \varphi(f_{\Delta - E_k}) = \int_{E_k} f \cdot g \, d\mu_0 + \varphi(f_{\Delta - E_k})$$

და თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(f_{\Delta - E_k}) = 0.$$

მივიღებთ დასამტკიცებელს. □

ვიდრე უშუალოდ წრფივი, სინგულარული ფუნქციონალის წარმოდგენაზე გადავალთ, მოვიყვანოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ლემა.

ლემა 2.2.1. ყოველი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის და ყოველი $f \in L_M^*$-თვის, რომლისთვისაც $0 \leq f$ და $W(f) < \infty$, არსებობს ისეთი $E \in B$, რომ

$$f_E \in E_M \ \text{ და } \ W(f - f_E) < \varepsilon.$$

გარდა ამისა, ყოველი არაუარყოფითწევრებიანი ისეთი ფუნქციონალური $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის, რომ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W(f_k) < \infty$ არსებობს $g \geq f_k$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$W(g) \leq \sum_{k=1}^{\infty} W(f_k).$$

დამტკიცება. თუ E_k სიმრავლეთა მიმდევრობას შემოვიღებთ შემდეგნაირად $E_k = \{t : f(t) \leq k\}$, მაშინ ცხადია, რომ თითქმის ყველგან $\lim\limits_{k\to\infty} f_{E_k} = f(t)$. ლებეგის თეორემის

გათვალისწინებით, მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, მივიღებთ $W(f-f_{E_k})\to 0$, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს n ინდექსი, რომლისთვისაც $W(f-f_{E_n})<\varepsilon$. განვიხილოთ დებულების მეორე ნაწილი. დავუშვათ $g_k=\max\{f_1(t),\dots,f_k(t)\}$, მაშინ, ცხადია,

$$0\le g_1\le g_2\le\cdots\le g_k\le g_{k+1}\le\cdots$$

და

$$W(g)=\lim_{k\to\infty}W(g_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}W(f_k),$$

სადაც

$$g(t)=\sup_k g_k(t)$$

(მართლაც, ინდუქციით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $W(g_k)\le\sum\limits_{k=1}^{k}W(f_i)$), ხოლო თუ გამოვიყენებთ ისევ თეორემის მაჟორირებადი კრებადობის შესახებ, მივიღებთ დასამტკიცებელს. $\square$

ლემა 2.2.2. განვიხილოთ ნებისმიერი წრფივი, სინგულარული, დადებითი φ და ψ ფუნქციონალები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

(1) $|||\varphi|||_{\overline{M}}=\|\varphi\|_{\overline{M}}=\sup\limits_{W(f)<\infty}\varphi(f)$;

(2) ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $g\ge 0$ ისეთი, რომ

$$W(g)\le\varepsilon,\quad \|\varphi\|_{\overline{M}}=\varphi(g).$$

(3) $\|\varphi+\psi\|_{\overline{M}}=\|\varphi\|_{\overline{M}}+\|\psi\|_{\overline{M}}$.

დამტკიცება. (1). უშუალოდ განმარტებიდან გვაქვს, რომ

$$|||\varphi|||_{\overline{M}}\le\|\varphi\|_{\overline{M}}=\sup_{M(f)<1}\varphi(f)\le\sup_{m(f)<\infty}\varphi(f).$$

მაშასადამე, (1) დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ შებრუნებული უტოლობის სამართლიანობა. მართლაც, განვიხილოთ $f\ge 0$, რომლისთვისაც $W(f)<\infty$. ლემა 2.2.1-ის გათვალისწინებით არსებობს h, $0\le h\in E_M$ ისეთი, რომ $0\le h\le f$ და

$W(f-h)<\varepsilon$. გარდა ამისა, თუ გამოვიყენებთ მეორე ნორმის წარმოდგენას ამემიას ფორმულით, მივიღებთ, რომ

$$\|f-h\|_{\overline{M}} \le 1+W(f-h) \le 1+\varepsilon.$$

მეორეს მხრივ, რადგან φ წრფივი, სინგულარული ფუნქციონალია გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(f)=\varphi(f-h)+\varphi(h)=\varphi(f-h),$$

ანუ

$$\varphi(f)=\varphi(f-h) \le \frac{(1+\varepsilon)\cdot\varphi(f-h)}{\|f-h\|_M} \le (1+\varepsilon)\cdot|||\varphi|||_{\overline{M}}.$$

$\varepsilon>0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო (ასევე იმის გათვალისწინებით, რომ f–ს ავიღებთ სრულად ნებისმიერად), მივიღებთ დასამტკიცებელს.

(2). როგორც (1)–დან გამომდინარეობს, არსებობს არაუარყოფითწევრებიან ფუნქციათა მიმდევრობა $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ისეთი, რომ

$$W(f_k) \le \frac{\varepsilon}{2^k} \ \text{ და } \ \|\varphi\|_{\overline{M}} \le f(f_k)+\frac{1}{k}\,.$$

თუ გამოვიყენებთ ლემა 2.2.1–ს, მაშინ, ცხადია, შეგვიძლია მოვიძიოთ g ისეთი, რომ

$$W(g) \le \sum_{k=1}^{\infty} W(f_k) \le \varepsilon \ \text{ და } \ g \ge f_k \ \ (k=1,2,\dots).$$

აქედან კი უშუალოდ გვაქვს

$$\|\varphi\|_{\overline{M}} \le \varphi(g)+\frac{1}{k} \le \|\varphi\|_{\overline{M}}+\frac{1}{k}\,.$$

(3). როგორც ვნახეთ არსებობს $g \ge 0$ ისეთი, რომ

$$W(g)<\infty \text{და } \ \|\varphi+\psi\|_{\overline{M}}=\varphi(g)+\psi(g).$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ

$$f(g)+\psi(g)=\|\varphi\|_{\overline{M}}+\|\psi\|_{\overline{M}}.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო

$$\varphi(g) + \psi(g) < \|\varphi\|_{\overline{M}} + \|\psi\|_{\overline{M}}$$

(ანალოგიურად განიხილება შებრუნებული უტოლობაც). ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\varphi(g) < \|\varphi\|_{\overline{M}}.$$

ისევ მე–(2) პუნქტის ძალით არსებობს ისეთი $h \geq 0$, რომ

$$W(h) < \infty \ \text{ და } \ \|\varphi\|_{\overline{M}} = \varphi(h).$$

ლემა 2.2.1–ის გათვალისწინებით შეგვიძლია ავაგოთ $f \geq 0$, რომლისთვისაც

$$f \geq g, \quad f \geq h \ \text{ და } \ W(f) \leq W(g) + W(h) < \infty.$$

ყოველი ასეთი ფუნქციისთვის გვაქვს:

$$\|\varphi + \psi\|_{\overline{M}} \geq (\varphi + \psi)(f) > \varphi(g) + \psi(g) = \|\varphi + \psi\|_{\overline{M}}.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს დებულების სამართლიანობას. □

შენიშვნა 2.2.1. ლემა 2.2.2–ში განხილული მე–(3) თვისაბიდან გამომდინარეობს, რომ წრფივ, სინგულარულ ფუნქციათა სიმრავლე არის აბსტრაქტული L სივრცე კაკუტანის აზრით.

როგორც ვიცით, f_E არის f ფუნქციის შეზღუდვა E სიმრავლეზე. ბუნებრივად იბადება კითხვა: შეგვიძლია თუ არა ასეთივე ოპერაციის შესრულება ფუნქციონალებზე, თუ φ ფუნქციონალი არის ფუნქციური ტიპის ანუ არსებობს მისი ინტეგრალური

$$\varphi(f) = \int f \cdot g \, d\mu$$

წარმოდგენა, მაშინ ბუნებრივია φ ფუნქციონალის შეზღუდვა განვმარტოთ g–ს საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\varphi_E(f) = \int f \cdot g_E \, d\mu_0.$$

როგორ მოვიქცეთ, თუ g არ არის ფუნქციური ტიპის?!

პასუხი შემდეგია: $\varphi_E \equiv \varphi(f_E), \forall\, f \in L^*_M$. ცხადია, როდესაც φ ფუნქციური ტიპისაა, ეს განმარტება ემთხვევა უკვე შემოღებულს. ჩვენ ვნახავთ, რომ სინგულარული ფუნქციონალის შემთხვევაში, აღნიშნული განმარტებით, φ–დან ბუნებრივად ინდუცირდება არაუარყოფითი ზომა. მართლაც, განვიხილოთ სინგულარული φ ფუნქციონალი და $E \cap F = \varnothing$ სიმრავლეები. თუ გავითვალისწინებთ ლემა 2.2.2–ს მივიღებთ, რომ

$$\|\varphi_{E\cup F}\|_{\overline{M}} = \|\varphi_E + \varphi_F\|_{\overline{M}} = \|\varphi_E\|_{\overline{M}} + \|\varphi_F\|_{\overline{M}}.$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი

ლემა 2.2.3. თუ φ არის სინგულარული, წრფივი, დადებითი ფუნქციონალი, მაშინ ν_φ, რომელიც განმარტებულია B–ზე შემდეგნაირად $\nu_\varphi(E) = \|\varphi_E\|_{\overline{M}}$, არის არაუარყოფითი ზომა, რომლისთვისაც

$$\nu_\varphi(\Delta) = \|\varphi\|_{\overline{M}}.$$

ბუნებრივია იბადება კითხვა: როგორ შეგვიძლია შესაბამისი ზომის საშუალებით აღვადგინოთ საწყისი φ. ამისათვის შემოვიტანოთ

$$\rho(f) = \inf_{W(\xi f)<\infty} |\xi|^{-1}$$

ფუნქციონალი.

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია

ლემა 2.2.4. ყოველი $\rho(f)$ ფუნქციონალისთვის სრულდება შემდეგი თვისებები

(1) $\rho(\alpha \cdot f) = |\alpha| \cdot \rho(f), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(2) $|g| \le |f| \Longrightarrow \rho(g) \le \rho(f)$;

(3) $f \cdot g = 0 \Longrightarrow \rho(f+g) = \max\{\rho(f), \rho(g)\}$;

(4) $\rho(f) \le 1 \Longleftrightarrow W((1-\varepsilon)\cdot f) < \infty, \forall\, \varepsilon, 1 > \varepsilon > 0$;

(5) $\rho(f) \geq 1 \Longleftrightarrow W((1+\varepsilon)\cdot f) = \infty, \forall\, \varepsilon, \varepsilon > 0;$

(6) $\rho(f) = 0 \Longleftrightarrow f \in E_M.$

ცხადია, ლემა 2.2.3–ის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\|\varphi\|_{\overline{M}} = \sup_f \frac{\varphi(f)}{\rho(f)}\,.$$

მეორეს მხრივ, თუ ყოველი ν არაუარყოფით ზომისთვის φ_ν ფუნქციონალს განვმარტავთ შემდეგნაირად:

$$\varphi_\nu(f) = \inf \sum_{k=1}^{n} \rho(f_{E_n})\cdot \nu(E_k), \quad \forall\, f \geq 0$$

(აქ ინფმუმი აიღება Δ სიმრავლის ყველა სასრული დაყოფის მიმართ), მაშინ სამართლი–ანია

ლემა 2.2.5. $\varphi_\nu(f)$ ფუნქციონალი აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

(1) $\varphi_\nu(\alpha\cdot f) = \alpha\cdot\varphi_\nu(f), \forall\,\alpha \in \mathbb{R}_+;$

(2) $0 \leq f \leq g \Longrightarrow \varphi_\nu(f) \leq \varphi_\nu(g);$

(3) $\varphi_\nu(f+g) = \varphi_\nu(f) + \varphi_\nu(g);$

(4) $0 \leq \varphi_\nu(f) \leq \rho(f)\cdot\nu(\Delta).$

ლემა 2.2.6. თუ განვიხილავთ $\varphi_\nu(f) = \varphi_\nu(f^+) - \varphi_\nu(f^-)$ ფუნქციონალს, $\forall\, f \in L^*_M$–თვის, მაშინ ეს იქნება სინგულარული ტიპის ფუნქციონალი, რომლისთვისაც სამართლიანია $\|\varphi_\nu\| \leq \nu(\Delta)$ უტოლობა.

ახლა მოვიყვანოთ ძირითადი თეორემა, რომლის საშუალებითაც შევძლებთ საწყისი ფუნ–ქციონალის აღდგენას შესაბამისი ზომისგან.

თეორემა 2.2.3. დავუშვათ φ არის სინგულარული, წრფივი დადებითი ფუნქციონალი, ხოლო ν–ზომა განმარტებულია შემდეგი ფორმით: $\nu_\varphi(E) = \|\varphi_E\|_{\overline{M}}$. მაშინ $\varphi = \varphi_\nu$.

დამტკიცება. განვიხილოთ Δ სივრცის ნებისმიერი სასრული $\{E_k\}_{k=1}^n$ დაყოფა. ყოველი ასეთი $\{E_k\}_{k=1}^n$ მიმდევრობისთვის სამართლიანია შემდეგი:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \sum_{k=1}^n \varphi(f_{E_k}) = \sum_{k=1}^n \varphi_{E_k}(f_{E_k}) \le \sum_{k=1}^n \rho(f_{E_k}) \cdot \|\varphi_{E_k}\|_{\overline{M}} \\ &= \sum_{k=1}^n \rho(f_{E_k}) \cdot \nu(E_k).\end{aligned}$$

მაშასადამე, მივიღეთ, რომ $\varphi(f) \le \varphi_\nu(f)$. მეორეს მხრივ, ლემა 2.2.6–ის გათვალისწინებით

$$\|\varphi_\nu\|_{\overline{M}} \le \nu(\Delta) = \|\varphi\|_{\overline{M}},$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\|\varphi_\nu\|_{\overline{M}} = \|\varphi\|_{\overline{M}}.$$

მაშასადამე,

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{M}} = \|\varphi_\nu\|_{\overline{M}} - \|\varphi\|_{\overline{M}} = 0,$$

აქედან მივიღებთ

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{M}} = 0.$$

მაგრამ, რადგან $\varphi_\nu - \varphi \ge 0$ და $\varphi \ge 0 \Longrightarrow \varphi = \varphi_\nu$.

შევნიშნოთ, რომ შესაბამისი რეფლექსური დამოკიდებულება არ სრულდება $\nu \longmapsto \varphi_\nu$ ასახვისთვის $\varphi \;\to\; \nu_\varphi$ ასახვის მიმართ. იმისათვის, რომ აღნიშნული შესრულდეს, G ზომათა კლასი (Δ–ზე განსაზღვრული ზომები) უნდა შეიზღუდოს არსებითად შემდეგნაირად: $\mathcal{F}$–ით აღვნიშნოთ ის ზომები G–დან, რომლისთვისაც არსებობს დიზიუნქციური $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$|\gamma|\Big(\Delta - \bigcup_{k=1}^\infty G_k\Big) = 0 \;\text{ და }\; \sum_{k=1}^\infty M(k)\cdot \mu_0(G_k) < \infty.$$

ასევე

$$\sum_{k=1}^\infty M\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot k\Big)\cdot \mu_0(G_k \cap E) = \infty \;\; (k=1,2,\dots), \;\; \forall\, E \in B$$

სიმრავლისთვის, რომლისთვისაც $|\nu|(E) \neq 0$. როგორც ვიცით, ასეთი ტიპის ზომათა კლასი არის წმინდად სასრულად ადიციური ზომები. $\square$

იოსიდა–ჰიუვიტის შედეგის ანალოგიურად სამართლიანია

ლემა 2.2.7. თუ φ არის სინგულარული, წრფივი დადებითი ფუნქციონალი, მაშინ ზომა, რომელიც განსაზღვრულია $\gamma_\varphi(E) = \|\varphi_E\|_{\overline{M}}$ ფორმულით, არის $\mathcal{F}$ კლასში, ანუ ν_φ ზომები არის წმინდად სასრულად ადიციური.

დამტკიცება. ლემა 2.2.2–დან გამომდინარე შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $E \in B$ სიმრავლსთვის, ყოველი $f \geq 0$ ფუნქციისთვის, რომლისთვისაც

$$W(f) < \infty \;\text{ და }\; \|\varphi\|_{\overline{M}} = \varphi(f),$$

სამართლიანია ტოლობა $\|\varphi_E\|_{\overline{M}} = \varphi(f_E)$. $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა განვმარტოთ შემდეგნაირად: $G_k = \{t : \; k+1 > f(t) \geq k\}$. ცხადია, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ დიზიუნქციურია. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\nu_\varphi\Big(\Delta - \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\Big) = \varphi\Big(f_{\Delta - \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k}\Big) \leq \varphi(\chi_\Delta) = 0.$$

მაგრამ, რადგან დაშვების ძალით φ არის სინგულარული, გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(k) \cdot \mu_0(G_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_k} M(f)\, d\mu_0 \leq W(f) < \infty.$$

გარდა ამისა, თუ

$$\nu_\varphi = \|\varphi_E\|_{\overline{M}} \neq 0$$

და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ

$$\|\varphi\|_{\overline{M}} = \sup_f \frac{\varphi(f)}{\rho(f)}\,,$$

მივიღებთ, რომ

$$\|\varphi_E\|_M = \varphi(f_E) \leq \rho(f_E) \cdot \|\varphi_E\|_{\overline{M}}.$$

მაშასადამე,

$$\rho(f_E) \geq 1,$$

აქედან $\forall\, \varepsilon > 0$ რიცხვისთვის $W((1+\varepsilon)\cdot f) = \infty$ (ლემა 2.2.4). მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი შეფასება:

$$\begin{aligned}\sum_{k=4n}^{\infty} M\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot k\Big)\cdot \mu_0(G_k\cap E)&\\ \geq \sum_{k=4n}^{\infty} M\Big(\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)(k+1)\Big)\cdot \mu_0(G_k\cap E)&\\ \geq \sum_{k=4n}^{\infty}\int_{G_k} M\Big(\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\cdot f\Big)\, d\mu_0 = \infty.&\end{aligned}$$

რადგან

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot k \geq \Big(1+\frac{1}{2n}\Big)\cdot (k+1), \;\; \forall\, k\geq 4n,$$

ანუ ვაჩვენეთ, რომ $\nu_\varphi \in \mathcal{F}$. $\square$

თეორემა 2.2.4. თუ ν არის არაუარყოფითი ზომა $\mathcal{F}$ კლასიდან, მაშინ

$$\|(\varphi_\nu)\|_{\overline{M}} = \nu(E), \;\; \forall\, E\in B.$$

დამტკიცება. პირველ რიგში განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $E = \Delta$. დავუშვათ $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ისეთია, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty} M(k)\mu_0(G_n) < \infty$$

და

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot k\Big)\cdot \mu_0(G_k\cap E) = \infty, \;\; \forall\, E\in B,$$

რომლისთვისაც $|\nu|(E) \neq 0$. პირველი პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $f \in L_M^*$, სადაც f განსაზღვრულია

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M(k)\cdot \chi_{G_k}$$

ტოლობით. მართლაც,

$$W(f) = \sum_{k=1}^{\infty} M(k)\cdot \mu_0(G_k) < \infty.$$

ასევე თუ გავითვალისწინებთ მეორე პირობას გვექნება, რომ

$$M\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot f_E\Big)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} M\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdot k\Big)\cdot \mu_0(G_k\cap E)=\infty \ \ (n=1,2,\dots), \ \ \forall\, E\in B,$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით მივიღებთ $\rho(f_E) = 1$. რაც, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ Δ სიმრავლის ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ დაყოფისთვის სამართლიანია

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho(f_{E_k})\cdot \nu(E_k)=\nu(\Delta)$$

ტოლობა. აქედან გამომდინარეობს

$$\varphi_\nu(f)=\nu(\Delta).$$

რაც იგივეა

$$\|\varphi_\nu\|_{\overline{M}}=\nu(\Delta).$$

ახლა კი დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. ყოველი ფიქსირებული $E \in B$-თვის, ν_1 ზომა განვმარტოთ

$$\nu_1(F)=\nu(E\cap F), \ \ \forall\, F\in B.$$

ტოლობით. მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\varphi_{\nu_1}=(\varphi_\nu)_E \implies \|(\varphi_\nu)_E\|_{\overline{M}}=\|\varphi_{\nu_1}\|_{\overline{M}}=\nu_1(\Delta)=\nu(E). \quad \square$$

თეორემა 2.2.5 (წრფივი, შემოსაზღვრული ფუნქციონალის ზოგადი სახე)**.** ნებისმიერი წრფივი, შემოსაზღვრული ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია L_M^* სივრცეზე ერთადერთი გზით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით

$$\varphi(f)=\int f\cdot g\,d\mu_0+M\int f\,d\nu,$$

სადაც $g\in L_{\overline{M}}^*$, ხოლო ν არის ზომა $\mathcal{F}$ კლასიდან. გარდა ამისა, φ ფუნქციონალის ნორმა მოიცემა შემდეგი ფორმით

(1) $\|\varphi\|_{\overline{M}} = \|g\|_{\overline{M}} + |\nu|(\Delta) = \inf\limits_{\varepsilon>0} \dfrac{1+\overline{M}(\xi g)}{\xi} + |\nu|(\Delta);$

(2) $|||\varphi|||_{\overline{M}} = \inf\limits_{\xi} \Big\{\xi^{-1} : \ \xi > 0 \text{ და } \overline{M}(\xi g) + \xi \cdot |\nu|(\Delta) \le 1\Big\}.$

შენიშვნა 2.2.2. $M \int f \, d\nu \equiv \varphi_\nu(f)$.

თეორემა 2.2.3–ის დამტკიცება. თეორემა 2.2.1–ის ძალით, φ შეიძლება დაიშალოს ერ–თადერთი გზით: $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$, სადაც φ_c არის ფუნქციური ტიპის, ხოლო φ_s — სინგულა–რული. მაშასადამე, არსებობს $g \in L^*_{\overline{M}}$ და ν ზომა ისეთი, რომ სამართლიანია

$$\varphi_c(f) = \int f \cdot g \, d\mu_0, \quad \varphi_s(f) = M \int f \, d\nu$$

წარმოდგენა. ერთადერთობა გამომდინარეობს თეორემა 2.2.3–დან.

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ (1) და (2) ტოლობების სამართლიანობა, საწყისად ვიგულის–ხმოთ, რომ $\varphi \ge 0$. ლემა 2.2.2–ის თანახმად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისთვის, არსებობს $f \ge 0$ და $h \ge 0$ შემდეგი თვისებით:

$$W(f) < 1, \quad \|\varphi_c\|_{\overline{M}} \le \varphi_c(f) + \varepsilon,$$

ასევე h–თვის გვაქვს

$$W(h) \le 1 - W(f), \quad \|\varphi_s\|_{\overline{M}} \le \varphi_s(h) + \varepsilon.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით შეგვიძლია მოვიძიოთ $h_1 \ge 0$ ისეთი, რომ $h_1 \ge f$ და $h_1 \ge h$. ასევე

$$W(h_1) \le W(h) + W(f) \le 1.$$

მაშასადამე, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \|\varphi_c\|_{\overline{M}} + \|\varphi_s\|_{\overline{M}} &\le \varphi_c(f) + \varphi_s(h) + 2\varepsilon \\ &\le \varphi_c(h_1) + \varphi_s(h_1) + 2\varepsilon \le \|\varphi_c + \varphi_s\|_M + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ε რიცხვი ნებისმიერად ავირჩიეთ, $\varepsilon > 0$, მივიღებთ

$$\|\varphi_c\|_{\overline{M}} + \|\varphi_s\|_{\overline{M}} \le \|\varphi\|_{\overline{M}} \implies \|\varphi_c\|_{\overline{M}} + \|\varphi_s\|_{\overline{M}} = \|\varphi\|_{\overline{M}}.$$

შეფასებას. მეორეს მხრივ, თეორემა 2.2.3–დან გვაქვს, რომ

$$\|g\|_{\overline{M}} + |\nu|(\Delta) = \|\varphi_c\|_{\overline{M}} + \|\varphi_s\|_{\overline{M}} = \|\varphi\|_{\overline{M}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, ასევე, პირველი ნორმის ამემიას წარმოდგენას, მივიღებთ დასამ–ტკიცებელს.

მოვიყვანოთ (2) ტოლობის დამტკიცება. დავუშვათ $\xi > 0$ და $W(\xi g) + \xi|\nu|(\Delta) \leq 1$. შეგვიძლია მოვიძიოთ $f \geq 0$ ისეთი, რომ $\|f\|_M \leq 1$ და სრულდება შემდეგი: $\forall\, \varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისთვის არსებობს $\eta \geq 1$, $1 + M(\eta f) \leq (1+\varepsilon)\eta$. ლემა 2.2.2–ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}\xi\varphi(\eta f) = \xi\varphi_c(\eta f) + \xi\varphi_s(\eta f) \leq W(\eta f) + \overline{W}(\xi g) + \xi|\nu|(\Delta) \\ \leq W(\eta f) + 1 \leq (1+\varepsilon)\cdot\eta \implies \varphi(f) \leq \frac{1+\varepsilon}{\xi}.\end{aligned}$$

მეორეს მხრივ, რადგან ε ნებისმიერად გვქონდა აღებული, გამომდინარეობს, რომ

$$|||\varphi|||_{\overline{M}} \leq \inf\left\{\frac{1}{\xi}:\ \ \xi > 0 \ \text{ და } \ \overline{M}(\xi g) + \xi\cdot|\nu|(\Delta) \leq 1\right\}.$$

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ შებრუნებული უტოლობის სამართლიანობა დავუშვათ, რომ $|||\varphi|||_{\overline{M}} = 1$. ასევე დავუშვათ, რომ $\overline{W}(g) + |\nu|(\Delta) > 1 + \delta$ რაიმე დადებითი δ რიცხვისთვის. თუ გავითვალისწინებთ ლემა 2.2.2–ს, ყოველი $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვის–თვის $(0, \frac{\delta}{3})$ შუალედიდან, არსებობს $f \geq 0$ და $h \geq 0$ შემდეგი თვისებით:

$$\begin{aligned}&W(f) < \infty, \quad \overline{W}(g) < \varphi_c(f) - W(f) + \varepsilon,\\ &W(h) < \infty, \quad |\nu|(\Delta) < \varphi_s(h) + \varepsilon.\end{aligned}$$

ანალოგიურად, ამემიას იგივეობის ძალით, შეგვიძლია მოვიძიოთ $h_1, h_1 \geq f, h_1 \geq h$ და

$$W(h_1) \leq W(f) + W(h) \leq W(f) + \varepsilon.$$

ყოველი ასეთი h–თვის სამართლიანია

$$\varphi(h_1) - W(h_1) \geq \varphi_C(f) + \varphi_s(h) - W(f) - \varepsilon,$$

$$\overline{W}(g) + |\nu|(\Delta) - 3\varepsilon > 1 + \delta - 3\varepsilon$$

უტოლობები. მეორეს მხრივ, რადგან $1 + W(\xi h_2) < \xi$, სადაც $\xi = \varphi(h_1) - \delta + 3\varepsilon$ და $h_2 = \frac{h_1}{\xi}$ გამომდინარეობს, რომ

$$\|h_2\|_M < 1$$

აქედან

$$\|h_1\|_M < \varphi(h_1) - \delta + 3\varepsilon \leq \|h_1\|_M - \delta + 3\varepsilon.$$

დაშვების ძალით კი

$$\overline{W}(g)(g) + |\nu|(\Delta) \leq 1.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. □

შეგვიძლია სინგულარული ფუნქციონალები დავახასიათოთ არა მხოლოდ E_M სივრცის საშუალებით, არამედ თვით ნორმის საშუალებითაც. როგორც ვნახეთ, სინგულარული φ–ფუნქციონალისთვის მისი პირველი და მეორე ნორმა ერთმანეთს ემთხვევა. აღმოჩნდა, რომ სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც.

თეორემა 2.2.6. შემოსაზღვრული, წრფივი ფუნქციონალი სინგულარული ტიპისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\|\varphi\|_{\overline{M}} = |||\varphi|||_{\overline{M}}.$$

თავი III

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები

3.1 ზოგიერთი დებულება ბანახის ფუნქციურ სივრცეში სინგულარული ფუნქციონალების წარმოდგენის შესახებ

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ზომადი სივრცეა, სადაც μ არის σ–სასრული ზომა. $M(\Omega)$–ით აღვნიშნოთ ყველა μ–ზომადი ფუნქციების ერთობლიობა, რომლებიც განსაზღვრულია Ω–ზე, $M^+(\Omega)$–ით კი — Ω–ზე განსაზღვრული ყველა არაუარყოფით ზომად ფუნქციათა ერთობლიობა.

განსაზღვრება 3.1.1. ვიტყვით, რომ $\rho : M^+(\Omega) \to [0, \infty)$ არის ბანახის ფუნქციური ნორმა, თუ $M^+(\Omega)$ აღებული ნებისმიერი h, g ფუნქციებისთვის, აგრეთვე $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობისთვის, ნებისმიერი $\lambda \geq 0$ რიცხვისთვის და ნებისმიერი სასრული ზომის მქონე E ზომადი სიმრავლისთვის გვაქვს:

(1) $\rho(f) = 0 \iff f = 0 \cdot \mu,$ თითქმის ყველგან

$$\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f), \quad \rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g);$$

(2) $0 \leq g \leq f, \ \ \mu$ თითქმის ყველგან $\Longrightarrow \rho(g) \leq \rho(f)$;

(3) $0 \leq f_n \uparrow f, \ \ \mu$ თითქმის ყველგან $\Longrightarrow, \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ (ფატუს თვისება);

(4) $\mu(E) < \infty \implies \rho(X_E) < \infty$;

(5) $\mu(E) < \infty \implies \int\limits_E f\,d\mu \le C_E\rho(f)$ რაიმე $C_E > 0$ მუდმივისთვის და ნებისმიერი f ფუნქციისთვის.

განსაზღვრება 3.1.2. ვთქვათ, ρ არის ბანახის ფუნქციური ნორმა. $X = X(\rho)$ სიმრავლეს ყველა იმ ზომადი ფუნქციებისა, რომლისთვისაც $\rho(|f|) < \infty$ ვუწოდებთ ბანახის ფუნქციურ სივრცეს. ყოველი $f \in X$ ფუნქციისთვის განვმარტოთ ნორმა X სივრცეში შემდეგნაირად:

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

განსაზღვრება 3.1.3. ვთქვათ, $X = X(\rho)$ არის რაიმე ბანახის სივრცე. ვიტყვით, რომ X წარმოადგენს semi-M-სივრცეს, თუ სრულდება შემდეგი პირობა: თუ f და g რაიმე არაუარყოფითი ფუნქციებია X სივრციდან ისეთი, რომ

$$\rho(f) = \rho(g) = 1 \;\; \text{და} \;\; \mathrm{sup}(f,g) \ge h_n \downarrow 0,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \le 1.$$

მარტივია ჩვენება იმისა, რომ ნებისმიერი M-სივრცე კაკუტანის აზრით არის semi-M-სივრცე, აგრეთვე ნებისმიერი ბანახის ფუნქციური სივრცე აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმით, არის semi-M-სივრცე.

ვთქვათ, $X = X(\rho)$ რაიმე ფუნქციური სივრცეა. აღვნიშნოთ X^*-ით X-სივრცის შეუღლებული სივრცე. X'-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ ინტეგრებად ფუნქციათა ერთობლიობა, რომლისთვისაც

$$\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_X \le 1} \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x) < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ $\|\cdot\|_{X'}$ სიდიდე X'-ზე განმარტავს ფუნქციურ ნორმას. $(X', \|\cdot\|_{X'})$ სივრცეს უწოდებენ X-სივრცის ასოცირებულ სივრცეს. რეალურად X' შედგება X^*-სივრცის ყველა იმ ფუნქციონალებისგან, რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს

$$F(f) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,d\mu(x), \;\; \forall\, f \in X$$

ინტეგრალური ფორმით.

შევნიშნოთ, რომ $F \in X'$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი

$$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$$

ფუნქციათა მიმდევრობისთვის, რომელთათვისაც $\inf f_n = 0$ $(f_n \downarrow 0)$. თითქმის ყველ–გან გვაქვს $F(h_n) \to 0$. ყველა ასეთი ფუნქციონალების სიმრავლე აღვნიშნოთ X_C^*–ით. X_C^* წარმოადგენს X^*–სივრცის ჩაკეტილ ქვესივრცეს. X_S^*–ით აღვნიშნოთ X_C^*–სივრცის დიზიუნქციური დამატება X^*–სივრცემდე. X_S^*–სივრცის ელემენტებს უწოდებენ X–სივ–რცეზე განსაზღვრულ სინგულარულ ფუნქციონალებს. სამართლიანია

$$X^* = X_C^* \oplus X_S^* = X' \oplus X_S^*$$

ტოლობა.

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ზომადი სივრცეა, სადაც μ არის σ–სასრული ზომა. $\mathbb{B}$–ით აღვნიშნოთ ნამდვილმნიშვნელობიანი ν–ზომები განსაზღვრული $(\Omega, \mathcal{F})$–ზე, რომელთათვისაც $|\nu| < \infty$ და რომლებიც აბსოლუტურად უწყვეტებია μ–ზომის მიმართ $(\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0)$. კარგადაა ცნობილი, რომ $(L^\infty(\Omega))^* = \mathbb{B}$. $CA(\mathbb{B})$–ით აღვნიშნოთ ყველა თვლადად ადიციური ზომა $\mathbb{B}$ სიმრავლიდან, ხოლო $PFA(\mathbb{B})$–ით აღვნიშნოთ ყველა წმინ–დად სასრულად ადიციური ზომები $\mathbb{B}$–დან. გვაქვს

$$\mathbb{B} = CA(\mathbb{B}) \oplus PFA(\mathbb{B}).$$

რადონ–ნიკოდიმის თეორემის ძალით

$$CA(\mathbb{B}) \cong L'(\Omega).$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ანდოს მიერ ორლიჩის სივრცეებისთვის ნაჩვენები იყო, რომ $(L_M^*)_S^*$ აბსტრაქტული L–სივრცეა, ანუ ნებისმიერი F_1 და F_2 არაუარყოფით სინგულარული ფუნქციონალებისთვის

$$\|F_1 + F_2\| = \|F_1\| + \|F_2\|.$$

ამავე დროს, მის მიერ $PFA(\mathbb{B})$ სივრცეში აგებულ იქნა ბანახის სივრცე (რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს მესერს), რომელიც იზომორფულია (როგორც მესერი და როგორც ბანახის სივრცე) $(L_M^*)_S^*$ სივრცის.

ბუნებრივია დაისვას კითხვა: ვთქვათ, X ბანახის ფუნქციური სივრცეა. გვაქვს

$$X^* = X_C^* \oplus X_S^* = X' \oplus X_S^*.$$

ნაპოვნი იქნას X–სივრცისთვის პირობები, რომელიც უზრუნველყოფს $PFA(\mathbb{B})$ სივრცეში ქვესივრცის არსებობას, რომელიც იზომორფული იქნება (როგორც ნორმირებული სივრცე და როგორც მესერი) X_S^*–ის. ასეთი ტიპის თეორემებს ლიტერატურაში მოიხსენიებენ როგორც თეორემებს სინგულარული ფუნქციონალების წარმოდგენის შესახებ.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1.1 (ანდო). ვთქვათ, $X = X(\rho)$ რაიმე ფუნქციური სივრცეა. იმისათვის, რომ არსებობდეს $PFA(\mathbb{B})$–ში ქვესივრცეს, რომელიც იზომორფული იქნება (როგორც ნორმირებული სივრცე და როგორც მესერი) X_S^*–ის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ X სივრცე იყოს semi–M თვისების მქონე.

შემდეგი პირობები ეკვივალეტურია:

(ა) X არის semi–M–სივრცე.

(ბ) არსებობს $M : X^+ \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

(1) $\|f\|_X \leq 1 + M(f), \forall\, f \in X^+$;

(2) თუ $f_1, f_2 \in X^+$, $\|f_1\|_X = \|f_2\|_X = 1$ და $f = \sup(f_1, f_2)$, მაშინ $M(g_n) \to 0$ ნებისმიერი $\{S_n,\ n = 1, 3, \dots\} \subset X^+$ მიმდევრობისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს $f \geq g_n \downarrow 0$ პირობას.

3.2 სინგულარული ფუნქციონალები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

როგორც ჩვენთვის ცნობილია $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ სივრცეზე შეგვიძლია შემოვიტანოთ ერთმანეთის ეკვივალენტური ბანახის ნორმები:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(t)}{\lambda}\right|^{p(t)} d\mu(t) \le 1\right\} \ \text{(ლუქსემბურგის ნორმა)},$$

$$\big|\|f\|\big|_{p(\cdot)} = \sup\left\{\left|\int\limits_{\Omega} f(t)g(t)\,d\mu(t)\right|, \ \ \rho_{q(\cdot)}(g) \le 1\right\} \ \text{(ორლიჩის ნორმა)},$$

$$\|f\|'_{p(\cdot)} = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\big(1 + \rho_{p(\cdot)}(\lambda f)\big) \ \text{(ამემიას ნორმა)}.$$

კარგადაა ცნობილი, რომ

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le \big|\|f\|\big|_{p(\cdot)} \le 2\|f\|_{p(\cdot)}, \ \ \forall\, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega),$$

აგრეთვე,

$$\big|\|f\|\big|_{p(\cdot)} = \|f\|'_{p(\cdot)}, \ \ \forall\, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega).$$

$\forall\, F \in (L^{p(\cdot)})^*$–თვის შეგვიძლია განვმარტოთ ორი ნორმა:

$$\|F\| = \sup\left\{F(f) : \ \ \big|\|f\|\big|_{p(\cdot)} \le 1\right\}$$

და

$$|\|F\|| = \sup\left\{F(f); \ \ \|f\|_{p(\cdot)} \le 1\right\}.$$

ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის განვმარტოთ

$$\theta(f) = \inf\left\{\lambda > 0 : \ \ \rho_{p(\cdot)}\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) < +\infty\right\},$$
$$d_1(f) = \inf\left\{\|f-g\|_{p(\cdot)}, \ \ g \in E^{p(\cdot)}\right\},$$
$$d_2(f) = \inf\left\{|\|f-g\||_{p(\cdot)}, \ \ g \in E^{p(\cdot)}\right\},$$

სადაც

$$E^{p(\,\cdot\,)} = \Big\{f: \ \ \rho_{p(\,\cdot\,)}(\lambda f) < +\infty, \ \ \forall\,\lambda > 0\Big\}.$$

ადვილია იმის ჩვენება, რომ $E^{p(\,\cdot\,)}$ წარმოადგენს $L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ სივრცის ყველა იმ ელემენ–ტების ერთობლიობას, რომელთაც აბსოლუტურად უწყვეტი ნორმა გააჩნია. შევნიშნოთ, რომ მოცემული $p(\,\cdot\,)$ ექსპონენტისთვის შეგვიძლია ავაგოთ $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$–ზომად სიმრავლე–თა მიმდევრობა ისეთი, რომ $0 < \mu(T_n) < \infty$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n = \Omega$ და $\forall\, n$–თვის $\chi_{T_n} \in E^{p(\,\cdot\,)}$. ყოველი $f \in L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის განვიხილოთ ფუნქციათა

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{როცა } t \in T_n \text{ და } |f(t)| \le n, \\ 0 & \text{დანარჩენ შემთხვევაში} \end{cases}$$

მიმდევრობა. როგორც კლასიკური ორლიჩის სივრცეებისთვის შევნიშნოთ, რომ სამარ–თლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 3.2.1. ნებისმიერი $f \in L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p(\,\cdot\,)} = \lim_{n\to\infty} \big|\|f - f_n\|\big|_{p(\,\cdot\,)} = \theta(f) = d_1(f) = d_2(f).$$

თეორემა 3.2.1. ნებისმიერი $F \in (L^{p(\,\cdot\,)})^*$ სინგულარული ფუნქციონალისთვის

$$\|F\| = |\|F\|| = \sup\Big\{F(f), \ \ \rho_{p(\,\cdot\,)}(f) < +\infty\Big\} = \sup_{f \in L^{p(\,\cdot\,)}} \frac{F(f)}{\theta(f)}\,.$$

დამტკიცება. $\forall\, f \in L^{p(\,\cdot\,)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის და $\forall\, n \in N$ ნომრისთვის გვექნება

$$F(f) = F(f - f_n) \le \|F\| \cdot |\|x - x_n\||_{p(\,\cdot\,)}.$$

ლემა 3.2.1–ის ძალით გვექნება

$$F(f) \le \theta(f) \cdot \|F\|.$$

გარდა ამისა, თუ $\rho_{p(\,\cdot\,)} < +\infty$, მაშინ $\rho_{p(\,\cdot\,)}(f - f_n) \to 0$ და ამიტომ

$$\theta(f) = \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{p(\,\cdot\,)} \le 1.$$

გვექნება

$$
\begin{aligned}
\|F\| &= \sup_{x\in L^{p(\cdot)}} \frac{F(f)}{|||f|||_{p(\cdot)}} \le \sup_{x\in L^{p(\cdot)}} \frac{F(f)}{\|f\|_{p(\cdot)}} \\
&= |||F||| \le \sup\Big\{F(f): \ \ \rho_{p(\cdot)}(f) < +\infty\Big\} \\
&\le \sup\Big\{\frac{F(f)}{\theta(f)}: \ \ \rho_{p(\cdot)}(f) < +\infty\Big\} \\
&\le \sup_{f\in L^{p(\cdot)}} \frac{F(f)}{\theta(f)} \le \|F\|.
\end{aligned}
$$

აღნიშნული უტოლობიდან დავასკვნით, რომ მოყვანილ უტოლობებში რეალურად გვაქვს ტოლობა. □

თეორემა (ძირითადი). $(L^{p(\cdot)}(\Omega), \|\ \cdot\ \|_{p(\cdot)})$ და $(L^{p(\cdot)}(\Omega), |||\ \cdot\ |||_{p(\cdot)})$ სივრცეები წარმოადგენს semi–M ტიპის სივრცეებს.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ $\forall\, f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ფუნქციისთვის

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le |||f|||_{p(\cdot)} \le 1 + \rho_{p(\cdot)}(f).$$

ვთქვათ, $f_1, f_2 \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ არაუარყოფითი ფუნქციებია და

$$|||f_1|||_{p(\cdot)} = |||f_2|||_{p(\cdot)} = 1 \ \ (\text{ან} \ \ \|f_1\|_{p(\cdot)} = \|f_2\|_{p(\cdot)} = 1),$$

მაშინ $\rho_{p(\cdot)}(f_1), \rho_{p(\cdot)}(f_2) < \infty$ და ამიტომ $f = \sup(f_1, f_2)$ ფუნქციისთვისაც გვექნება $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$. განვიხილოთ $f_n \downarrow 0$ ფუნქციათა მიმდევრობა ისეთი, რომ $f \ge g_n$ $\forall\, n$–თვის. მაშინ ზღვარზე ლებეგის გადასვლის თეორემის ძალით გვექნება $(g_n) \downarrow 0$. მაშასადამე, $\rho_{p(\cdot)}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლემა 3.2.1–ის ყველა პირობას. თეორემა დამტკიცებულია. □

შედეგი 3.2.1. $(L^{p(\cdot)})^*_S$ წარმოადგენს AL სივრცეს.

შედეგი 3.2.2. $(L^{p(\cdot)})^*_S$ სივრცესა და $(L^{\infty})^*_S$ სივრცის ქვესივრცეს შორის არსებობს იზომორფიზმი.

დასკვნა

შესწავლილია ლებეგის $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ცვლადმაჩვენებლიანი სივრცის $(L^{p(\cdot)}(\Omega))_S^*$ შეუღლე-ბული სივრცის იზომორფული ჩადგმა წმინდად სასრულად ადიციურ ზომათა კლასში. ასევე მოყვანილია საკმარისი და აუცილებელი პირობა იმისა, თუ როდის არის შესაძლებელი გარკვეული არასტანდარტული ბანახის ფუნქციური სივრცისთვის მსგავსი ჩადგმა.

ლიტერატურა

[1] T. Ando, Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Arch. Wisk. (3) **8** (1960), 1–16.

[2] Ep. de Jonge, Representation of linear functionals on a class of normed Kothe spaces. J. Functional Analysis **23** (1976), no. 2, 119–134.

[3] K. Yosida and E. Hewitt, Finitely additive measures. Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 46–66.