

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ირაკლი ჯოხაძე

დიდ-მასშტაბოვანი ველების ფორმირება პულსარის გადაგვარებულ
რელატივისტურ გარე შრეში

სამაგისტრო პროგრამა „ფუნდამენტური ფიზიკა“

ასტროფიზიკის კათედრა

ნაშრომი შესრულებულია ფიზიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელები:

ნანა შათაშვილი, პროფ.

ალექსანდრე თევზაძე, ასოც. პროფ.

ასტროფიზიკის კათედრა, ფიზიკის დეპარტამენტი,

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თბილისი

2019

სარჩევი

1. შესავალი	5
2. მოდელი	8
3. წონასწორული მდგომარეობები - განტოლებები, პირობები	13
4. მრუდე სივრცეში გადაგვარებული e-p პლაზმის დინამიკის აღმწერი განტოლებები სფერულ კოორდინატებში	16
5. გადაგვარებული რელატივისტური e-p პლაზმის გამოტყორცნილი დინების ამონახსნი კომპაქტური ობიექტის ზედაპირთან ახლოს.	21
6. დასკვნა და სამომავლო გეგმები	28
7. გამოყენებული ლიტერატურა	29
A ოპერატორები ორთგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში	31
B სფერული ფუნქციები და მათი თვისებები	32

ანოტაცია

კომპაქტური ობიექტის გარე შრისთვის აგებულია რელატივისტური განზოგადოებული გრიგალის ტენზორი. შესწავლილია ორმაგი ბელტრამი-ბერნულის (ბბ) წონასწორული მდგომარეობების/სტრუქტურების არსებობის შესაძლებლობა პულსარის ზედაპირთან ახლოს გადაგვარებულ გარე შრეში. თეორიული ფორმალიზმი დაფუძნებულია გადაგვარებული რელატივისტური ელექტრონ-პოზიტრონული სითხის განტოლებებზე, რომლებშიც გათვალისწინებულია გრავიტაციული ეფექტები. აღებულია შვარცშილდის მეტრიკის ტენზორი. ბბ-ს წონასწორობის მდგომარეობა გადაგვარებული ელექტრონის და პოზიტრონის სითხისათვის განისაზღვრება ორი რელატივისტური ბელტრამის პირობით; შედეგად მიიღება სამმაგი ბელტრამის მდგომარეობები. დიდ-მასშტაბოვანი დინების და მაგნიტური ველის საილუსტრაციო რიცხვითი ამონახსნებისთვის განტოლებები ჩაწერილია სფერულ კოორდინატებში და სიდიდეები გაშლილია სფერული ჰარმონიკების საშუალებით. ნაჩვენებია რომ გარკვეულ პირობებში სისტემაში არსებობს კატასტროფა, რომლის დროსაც ხდება სიმკვრივის სწრაფი დავარდნა და კომპაქტური ობიექტის ზედაპირთან სწრაფი გარედინების ფორმირება. მიღებულია შუალედური შედეგები პოლარულ არეში ზედაპირთან ახლოს გარე შრეში გენერირებული დიდ-მასშტაბოვანი დინების ფორმირებისთვის პულსარის ნელი ბრუნვის შემთხვევაში. მოსალოდნელია, რომ კომპაქტური ობიექტების ატმოსფეროში გენერირებული გარედინება წვლილს შეიტანს დიდ-მასშტაბოვანი დისკი-ჯეტის ნივთიერებისა და ენერჯის მომარაგებაში; აღმოჩენილმა ეფექტებმა მნიშვნელოვანი როლი შეიძლება ითამაშოს ისეთი კომპაქტური ობიექტების, როგორცაა, მაგალითად, აქტიური გალაქტიკის ბირთვები და პულსარი, გარშემო რელატივისტური დისკი-ჯეტის წონასწორული სტრუქტურის ფორმირების მოდელში. აგებული მოდელი შეიძლება გამოყენებული იყოს რელატივისტური ჯეტების დაკვირვებითი თვისებების შესასწავლად.

Abstract

The relativistic generalized vorticity tensor is constructed for the outer layer of the compact objects. The possibility of the existence of the double Beltrami-Bernoulli (BB) relaxed states/ structures is explored for the pulsar's degenerate electron-positron relativistic outer layer close to the surface. Theoretical formalism is based on the degenerate relativistic fluid equations taking into account the gravitational effects. The metric tensor is that of the Schwarzschild. The BB equilibrium is defined by two relativistic Beltrami conditions for degenerate electron and positron fluids; as a result, Triple Beltrami states are obtained. For finding the illustrative numerical solutions of large-scale flows and magnetic fields the derived equations are written in spherical coordinates and are expanded using spherical harmonic functions. It is shown that under certain conditions there is a catastrophe in the system leading to the fast density drop and fast outflow formation near the compact object surface. Preliminary estimations for generated large-scale flow for the pulsar polar regions close to the surface are performed for the case of slow rotation. It is expected that the generated outflows in compact object atmosphere will contribute to the matter and the energy of the large-scale jet; then, discovered effect can play an important role in the model of equilibrium relativistic disk-jet structure formation around the compact objects like AGN and Pulsar. Constructed model can be applied for the exploration of observational features of relativistic jets.

1. შესავალი

დაკვირვებებიდან ირკვევა, რომ ბუნებაში არსებობს ცენტრალური გრავიტირებადი ობიექტის გარშემო დისკი-ჯეტის სტრუქტურები, რომელთაც ტოპოლოგიური მსგავსების მიუხედავად მახასიათებელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობები აქვს. ითვლება რომ ჯეტები ნივთიერებით და მატერიით იკვებება დისკიდან, თუმცა კომპაქტური ობიექტების შემთხვევაში როგორცაა მაგ. AGN, ვარაუდია რომ რელატივისტური ჯეტების მომარაგება ასევე ხდება კომპაქტური ობიექტის მაგნიტოსფეროდან, ვინაიდან რელატივისტურ ჯეტს უზარმაზარი რაოდენობის ენერგია ესაჭიროება [1]. ენერგიის შესაძლო წყაროდ ითვლება მბრუნავი შავი ხვრელის მიერ მაგნიტური ველის ენერგიის ნაწილის ექსტრაქტირება (ბლენდფორდ-ზნაჟეკის მოდელი) [2], ასევე მბრუნავ სივრცე-დროში ხდება ნაწილაკების ენერგიის გაზრდა შავი ხვრელის ენერგიის ხარჯზე (პენროუზის (1971) მოდელი).

სავარაუდოა, რომ, მსგავსად შავი ხვრელისა, ნეიტრონული ვარსკვლავის მაგნიტოსფეროსაც შეაქვს წვლილი ჯეტის ნივთიერებით და ენერგიით მომარაგებაში და მისი საბოლოო მახასიათებლების ჩამოყალიბებაში (თუმცა განსხვავებული მექანიზმით - გადაგვარების ენერგიის ნაწილაკების კინეტიკურ ენერგიაში გადასვლით, რასაც განაპირობებს სხვადასხვა მცირე მასშტაბის არსებობა სისტემაში [7]), ვინაიდან ნეიტრონული ვარსკვლავების შემთხვევაში (მაგ. IGR J11014-6103 რომლის ჯეტის სიჩქარეა 0.8c) დამზერულია ჯეტები, რომელთა გარშემო არ დაიკვირვება აკრეციული დისკი და ასევე არ ბრუნავენ სწრაფად [3-4]. ამრიგად სავარაუდოა რომ თავად ნეიტრონულ ვარსკვლავს შეუძლია მძლავრი ჯეტის წარმოქმნა მაგნიტოსფეროში, რომელიც თავის მხრივ წვლილს შეიტანს დისკი-ჯეტის სტრუქტურაში. ენერგიის გარდაქმნის საშუალებას წარმოადგენს სისტემაში მასშტაბთა იერარქიის არსებობა, რომელთაც შეესაბამება გარკვეული წონასწორული მდგომარეობა/სტრუქტურა. წყვილ ორ-სითხოვან სისტემაში წონასწორული მდგომარეობის მარტივ კლასს წარმოადგენს სამმაგი ბელტრამის პირობა [7] (რომელიც მიიღება სითხის დინების ენერგიის მინიმიზაციით, როდესაც სპირალობა ინვარიანტულია), რომლის მიხედვითაც „განზოგადოებული დინება“ თავისივე გრიგალის გასწვრივაა მიმართული. ეს პირობები ენერგიას აიძულებს მთელ სისტემაში თანაბრად გადანაწილდეს, რაც თავის მხრივ წარმოადგენს ბერნულის პირობას. ბელტრამი-ბერნულის წონასწორობა ხასიათდება ორი

რელატივისტური ბელტრამის პირობით, (თითო-თითო სითხისთვის) შესაბამისი ბერნულის პირობით და ამპერის კანონით, რომელიც კრავს სისტემას [5-9]. ამ განტოლებებს კი, როგორც ქვემოთ ვნახავთ და ნაჩვენებია [7]-ში კლასიკური გრავიტაციის შემთხვევაში, მიყვართ ე.წ. სამმაგი ბელტრამის სისტემისკენ.

ჩვენი შესწავლის საგანს წარმოადგენს ნეიტრონული ვარსკვლავის გარე შრეში ზედაპირთან ახლოს გამოტყორცნილი დინების და დიდ-მასშტაბოვანი მაგნიტური ველების ფორმირება; გარემო არის გადაგვარებული რელატივისტური ელექტრონ-პოზიტრონული სითხე.

ნეიტრონული ვარსკვლავი წარმოადგენს ზეახალი ვარსკვლავის კომპაქტურ ნარჩენს, რომლის მახასიათებელი ზომაა $R \sim 10 - 20$ კმ, მასა $M \sim 1 - 2 M_{\odot}$, შესაბამისად მაღალი სიმკვრივისაა $\rho_{ზედ} \sim 10^9$ კგ/მ³, $\rho_{ბირ} \sim 10^{17}$ კგ/მ³ (ატომბირთვის სიმკვრივის რიგის) და ახასიათებს ძლიერი გრავიტაციული ველი, რომელიც დედამიწის ზედაპირთან ველზე 10^{11} - ჯერ უფრო ძლიერია. მაგნიტური ველის სიდიდეა $B \sim 10^8 - 10^{15}$ გაუსი, ტემპერატურა $T_{ზედ} \sim 6 \times 10^5 K$, $T_{ბირ} \sim 10^{11} - 10^{12} K$, ხოლო ბრუნვის პერიოდი $\tau \sim 10^{-3} - 1$ წმ, თუმცა უკანასკნელი დაკვირვებებით აღმოჩენილია ანომალურად ნელა მბრუნავი ნეიტრონული ვარსკვლავები ბრუნვის პერიოდით 1062 წამი (SXPI062, 2011); 6.67 საათი (RCW103, 2016), რომელთაც გააჩნიათ უჩვეულოდ ძლიერი მაგნიტური ველი. ამ ტიპის ობიექტებს მაგნეტარის სახელით მოიხსენიებენ. ნეიტრონული ვარსკვლავის ზედაპირზე ძლიერი ელექტრომაგნიტური ველები ახდენენ ელექტრონულ-პოზიტრონული (e-p) წყვილების დიდი რაოდენობით დაბადებას, რომელთა კონცენტრაცია $n \sim 10^{26} - 10^{32}$. ასეთი მაღალი სიმკვრივის აირი იქცევა როგორც გადაგვარებული ფერმის გაზი (ნაწილაკებს შორის საშუალო მანძილი ნაკლებია სითბურ დე ბროილის ტალღის სიგრძეზე). ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება უგულვებელსაყოფი ხდება და აირი უფრო იდეალური ხდება სიმკვრივის ზრდასთან ერთად. თუკი ნაწილაკების სითბური ენერგია გაცილებით ნაკლებია მათ ფერმის ენერგიაზე აირი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ცივად, სრულიად გადაგვარებულად ($T = 0 K$) მაშინაც კი, როდესაც გაზის ტემპერატურა მილიარდი კელვინის რიგისაა [6-7,10].

ნეიტრონული ვარსკვლავის ზედაპირთან გრავიტაცია იმდენად ძლიერია, რომ აირის დინამიკის აღსაწერად აღარ გამოდგება ნიუტონის გრავიტაცია და აუცილებელი ხდება განტოლებების ფორმულირება გამრუდებულ სივრცე-დროში ზოგადი ფარდობითობის თეორიის გამოყენებით.

კლასიკური e-i გაზის დინების შემთხვევა განხილულია მზის ატმოსფეროს შემთხვევაში [11], გადაგვარებული e-i გაზის კი თეთრი ჯუჯებისათვის [6]-ში. შემდეგ [9]-ში განზოგადოება მოხდა ისეთი კომპაქტური ობიექტებისთვის, როგორცაა თეთრი ჯუჯა. ნაჩვენებია მკვრივ გადაგვარებულ გარემოში ამოტყორცნილი დინების ფორმირების მექანიზმი გადაგვარებულ ელექტრონულ და კლასიკური იონების გაზის შემთხვევაში. ასეთ სისტემაში არსებობს კატასტროფა - მაგნიტო-სითხური კავშირით წარმოიქმნება სწრაფი დინება (ნაჩვენებია შესაძლო ზე-ალფენური დინების ფორმირება) ზედაპირთან ახლოს.

გრავიტაციული და სითხური რელატივისტური ეფექტებით განზოგადოება მოხდა შავი ხვრელის გარშემო მბრუნავი დისკის შემთხვევაში, სადაც შეისწავლება შესაძლო რელატივისტური ჯეტის ფორმირება [8].

მოსალოდნელია რომ ისეთი კომპაქტური ობიექტის, როგორც ნეიტრონული ვარსკვლავია, გარე შრეში წარმოიქმნება ძლიერი გარედინება/ ტრანზიენტული ჯეტი გარკვეული მექანიზმით, მაგალითად გადაგვარების წნევა შეიძლება გარდაიქმნას დინების კინეტიკურ ენერგიაში, რომელიც საბოლოო ჯამში ენერგიით და მატერიით მოამარაგებს კომპაქტური ობიექტის გარშემო არსებულ ასტროფიზიკურ დისკ-ჯეტის სტრუქტურას. ამასთან, ჩვენს ამოცანაში ასევე გასათვალისწინებელი იქნება რელატივისტური გრავიტაციული ეფექტები.

2. მოდელი

პულსარის ზედაპირთან ახლოს გარე შრეში გადაგვარებული e-p პლაზმის დინამიკის აღსაწერად ვიყენებთ შემდეგ განტოლებებს: [8,12,13]

მოდრაობის განტოლება:

$$\nabla_\nu T_\pm^{\mu\nu} = q_\pm n_\pm F^{\mu\nu} U_{\pm\nu} \quad , \quad (1)$$

სადაც ენერგია-იმპულსის ტენზორი იდეალური სითხისთვის მოიცემა შემდეგი სახით:

$$T_\pm^{\mu\nu} = h_\pm U_\pm^\mu U_\pm^\nu + \mathcal{P}_\pm g^{\mu\nu} \quad , \quad (2)$$

ხოლო ენტალპიისთვის გვაქვს შემდეგი გამოსახულება [6,7,10]:

$$h_\pm = G_\pm m_\pm n_\pm \quad . \quad (3)$$

ზედა განტოლებებში $G_\pm(n_\pm)$ წარმოადგენს m მასის და U_\pm 4-სიჩქარის გადაგვარებული ელექტრონების და პოზიტრონების ე.წ. „ეფექტურ მასას“

$$G_\pm(n_\pm) = [1 + (n_\pm/n_c)^{2/3}]^{1/2} \quad . \quad (4)$$

$n_c = 5.9 \times 10^{29} \text{ სმ}^{-3}$ კრიტიკული კონცენტრაციაა, რომელზეც ფერმის იმპულსი mc -ს ტოლია და რომლის ზევითაც გარემო რელატივისტურია.

სითხის თითოეული კომპონენტისათვის უწყვეტობის განტოლებათ:

$$\nabla_\mu (n_\pm U_\pm^\mu) = 0 \quad . \quad (5)$$

მაქსველის განტოლებებია ($F^{\mu\nu}$ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორია):

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} q (n_+ U_+^\mu - n_- U_-^\mu) \quad , \quad (6)$$

$$\nabla_\nu F^{*\mu\nu} = 0 \quad , \quad (7)$$

სადაც $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ წარმოადგენს დუალურ ტენზორს.

ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის ანალოგიურად შემოვიყვანოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული „დინების“ ტენზორი [12]

$$S_\pm^{\mu\nu} = \nabla^\mu (G_\pm U_\pm^\nu) - \nabla^\nu (G_\pm U_\pm^\mu) \quad , \quad (8)$$

რომელიც აგებულია სითხის კინემატიკური U_\pm^ν და გადაგვარების G_\pm მახასიათებლებით

(2), (3), (8) \rightarrow (1) \Rightarrow

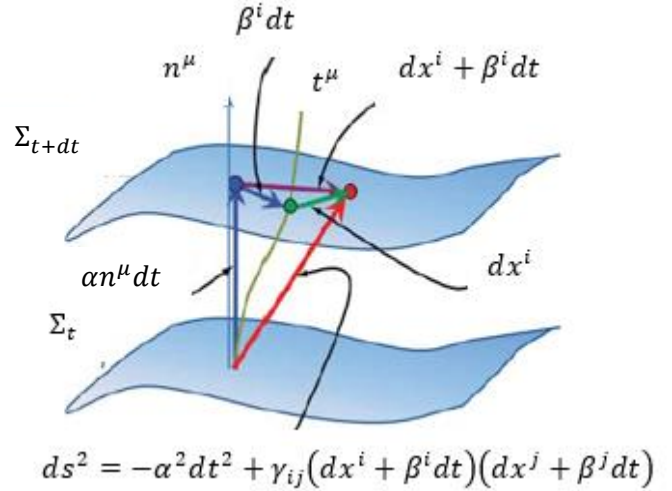
$$q_\pm U_{\pm\nu} M_\pm^{\mu\nu} = \frac{\nabla^\mu \mathcal{P}_\pm - m_\pm n_\pm \nabla^\mu G_\pm}{n_\pm} \quad , \quad (9)$$

სადაც

$$M_{\pm}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \pm \frac{m}{q} S^{\mu\nu} \quad (10)$$

წარმოადგენს ანტისიმეტრიულ განზოგადოებული გრიგალის ტენზორს, რომელიც აერთიანებს ელექტრომაგნიტურ ველს „დინების“ ველთან-

გრავიტო-მაგნიტო-სითხის აღსაწერად ვიყენებთ ე.წ. 3+1 ფორმალიზმს [8,13,14] , რომელიც გულისხმობს ოთხ-განზომილებიანი სივრცე-დროის 3 განზომილებიან ჰიპერ-ზედაპირების ოჯახად დაყოფას - თითოეული ჰიპერზედაპირი (თანადროული ზედაპირი) Σ_t , რომელიც გადანომრილია, წარმოადგენს $t = const$ ზედაპირს. t^μ წარმოადგენს დროის-მაგვარ ოთხ-ვექტორს, რომლის ინტეგრალური



წირები ყოველ Σ_t ზედაპირს გადაკვეთს მხოლოდ ერთხელ და ნორმირებულია $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ პირობით. t^μ -ს ეწოდება ევოლუციის ვექტორი, რომელიც $x^i = const$ ერთიადიმავე სივრცული კოორდინატების წერტილებს აერთებს ერთმანეთთან. t^μ -ს Σ_t -ს მიმართ ნორმალურ და ტანგენციალურ მდგენელებად გაშლით მივიღებთ:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu \quad , \quad (11)$$

სადაც n^μ წარმოადგენს Σ_t -ს ნორმალურ ერთეულოვანი სიგრძის ვექტორულ ველს:

$$n^\mu n_\mu = -1 \quad . \quad (12)$$

α ფუნქცია გვიჩვენებს, თუ როგორ გადის დრო გარკვეულ სივრცე-დროში კოორდინატულ დროსთან შედარებით (გამრუდებული სივრციდან შორს უძრავი სისტემასთან დაკავშირებული დრო), αn^μ ვექტორის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია კი იმაში მდგომარეობს რომ Σ_{t+dt} ჰიპერზედაპირი შეგვიძლია ავაგოთ მეზობელი Σ_t ჰიპერზედაპირიდან Σ_t -ის ყოველი წერტილის მცირე $\alpha n^\mu dt$ გადაადგილებით, ხოლო β^μ გვიჩვენებს თუ რამდენით წაინაცვლებს სივრცული კოორდინატები მეზობელ ჰიპერზედაპირზე გადასვლისას. განმარტებიდან მივიღებთ ორთოგონალურობის პირობას :

$$\beta^\mu n_\mu = 0 \quad . \quad (13)$$

ნამდვილ ვექტორულ ბაზისში კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები განისაზღვრება შესაბამისად:

$$n_\mu = -\alpha \nabla_\mu t = (-\alpha, 0, 0, 0), \quad n^\mu = (1/\alpha, -\beta^\mu/\alpha) \quad . \quad (14)$$

სივრცე-დროის მეტრიკა $g_{\mu\nu}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სივრცული (3 განზომილებიანი) მეტრიკის $\gamma_{\mu\nu}$ -ს საშუალებით

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad . \quad (15)$$

3+1 წარმოდგენა წარმოებს პროექციის ოპერატორით:

$$\gamma_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu \quad , \quad (16)$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას (რის გამოც ეწოდება პროექციის ოპერატორი)

$$n^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (17)$$

შესაბამისად ზევით განხილული ფორმალიზმით ორ უსასრულოდ ახლომდებარე მსოფლიო წერტილებს შორის ინტერვალი მოიცემა

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad . \quad (18)$$

ლორენცის ფაქტორია

$$\Gamma = [\alpha^2 - \gamma_{ij}(\beta^i \beta^j + 2\beta^i v^j + v^i v^j)]^{-1/2} \quad , \quad (19)$$

სადაც v^i სითხის სამ-სიჩქარეა, შესაბამისად სითხის ოთხ-სიჩქარის წარმოდგენისათვის მივიღებთ

$$U^\mu = \alpha \Gamma n^\mu + \Gamma \gamma_\nu^\mu v^\nu \quad . \quad (20)$$

საიდანაც (20)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$n_\mu U^\mu = -\alpha \Gamma \quad , \quad (21)$$

ხოლო აჩქარება განიმარტება

$$a_\mu = n^\nu \nabla_\nu n_\mu \quad . \quad (22)$$

ასევე სამართლიანია შემდეგი კავშირები

$$\nabla_\mu n_\nu = -a_\nu n_\mu + \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Theta \gamma_{\mu\nu} \quad , \quad (23)$$

სადაც გაფართოების სკალარი

$$\Theta = \nabla_\mu n^\mu \quad , \quad (24)$$

ხოლო

$$\sigma_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta (\nabla_\alpha n_\beta + \nabla_\beta n_\alpha) - \frac{1}{3}\Theta \gamma_{\mu\nu} \quad (25)$$

წარმოადგენს *შეარის* (წანაცვლების) ტენზორს.

ელექტრული და მაგნიტური ველები განისაზღვრება შემდეგნაირად [13-14]:

$$E^\mu = n_\nu F^{\mu\nu} \quad , \quad B^\mu = \frac{1}{2} n_\rho \epsilon^{\rho\mu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} \quad . \quad (26)$$

რომლებიც სივრცის-მაგვარები არიან, შესაბამისად $n_\mu E^\mu = 0$, $n_\mu B^\mu = 0$ (ვინაიდან $n_\nu n_\mu$ სიმეტრიულია, ხოლო $F^{\mu\nu}$ ანტისიმეტრიული).

ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით“

$$F^{\mu\nu} = E^\nu n^\mu - E^\mu n^\nu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\rho n_\sigma \quad . \quad (27)$$

განვიხილავთ ელექტრონ-პოზიტრონულ სითხეს ნეიტრონული ვარსკვლავის ზედაპირთან, რომელიც საკმაოდ ნელა ბრუნავს. ხშირად ასეთი ობიექტის მიერ გამრუდებული სივრცე-დრო აღიწერება შვარცშილდის მეტრიკით (მაგ. [14]) , სადაც ინტერვალი ორ უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ წერტილებს შორის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (28)$$

რომლის (24) -თან შედარებით ვასკვნით, რომ

$$\beta^i \equiv 0 \quad , \quad \Theta = 0 \quad , \quad \sigma_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (29)$$

(27) \rightarrow (6) მივიღებთ

$$\nabla_\nu (E^\nu n^\mu - E^\mu n^\nu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\rho n_\sigma) = 4\pi e (n_+ U_+^\mu - n_- U_-^\mu)$$

რომლის პროექციებით ერთეულოვან ვექტორზე მივიღებთ (მაქსველის განტოლებები ამ სახით დიაგონალურ მეტრიკაში მოცემულია [8], [13]-ში, სადაც განხილული იყო კლასიკური გაზი გადაგვარების ეფექტების გარეშე. ზოგადი მეტრიკისთვის კი მოცემულია [15]-ში)

სკალარული სახით შემდეგნაირად:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e \alpha (n_+ \Gamma_+ - n_- \Gamma_-) \quad . \quad (30)$$

ხოლო γ_μ^β პროექციით, (23) -ის გამოყენებით, ასევე (29) -ის გათვალისწინებით და

სივრცული ნაწილის განხილვით მივიღებთ ამპერის განტოლებას მრუდე სივრცისთვის

$$\frac{1}{\alpha} \nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = 4\pi q (n_+ \Gamma_+ \mathbf{v}_+ - n_- \Gamma_- \mathbf{v}_-) + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \quad (31)$$

ფარადეის ტენზორის დუალური ტენზორია:

$$F^{*\mu\nu} = B^\mu n^\nu - B^\nu n^\mu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} E_\rho n_\sigma \quad . \quad (32)$$

(32) გამოვიყენოთ (7) -ში და განვიხილოთ პროექცია n_μ -ზე მივიღებთ

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (33)$$

ხოლო γ_μ^β -ზე პროექციით და მანიპულაციებით მივიღებთ ფარადეის კანონის ზოგადი ფარდობითობის ვერსიას:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\alpha \mathbf{E}) \quad . \quad (34)$$

(30) და (31) განტოლებებიდან ელექტრონ-პოზიტრონული სითხის თითოეული კომპონენტისათვის მივიღებთ უწყვეტობის განტოლებას

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha n_\pm \Gamma_\pm) + \nabla \cdot (\alpha n_\pm \Gamma_\pm \mathbf{v}_\pm) = 0 \quad . \quad (35)$$

(26)-ის ანალოგიურად განვმარტოთ განზოგადოებული ელექტრული ξ^μ და მაგნიტური Ω^μ ველები მაგნიტო-სითხის ტენზორის $M^{\mu\nu}$ საშუალებით [5-6]

$$\xi_\pm^\mu = n_\nu M_\pm^{\mu\nu} \quad \Omega_\pm^\mu = \frac{1}{2} n_\rho \epsilon^{\rho\mu\sigma\tau} M_{\pm\sigma\tau} \quad , \quad (36)$$

რომლებიც E^μ და B^μ მსგავსად

$$n_\mu \xi_\pm^\mu = 0 \quad , \quad n_\mu \Omega_\pm^\mu = 0 \quad . \quad (37)$$

მაშინ მაგნეტოსითხის ტენზორი ელექტრომაგნიტური ტენზორის ანალოგიურად ჩაიწერება შემდეგნაირად [8,13]

$$M_\pm^{\mu\nu} = n^\mu \xi_\pm^\nu - n^\nu \xi_\pm^\mu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\pm\rho} n_\sigma \quad . \quad (38)$$

განზოგადოებული ელექტრული ველის სივრცული ნაწილისთვის მივიღებთ

$$\xi_\pm = \mathbf{E} - \frac{m_\pm}{\alpha q_\pm} \nabla (\alpha^2 G_\pm \Gamma_\pm) - \frac{m_\pm}{\alpha q_\pm} \frac{\partial}{\partial t} (G_\pm \Gamma_\pm \mathbf{v}_\pm) \quad . \quad (39)$$

განზოგადოებული მაგნიტური ველის (განზოგადოებული გრიგალი) სივრცული ნაწილია

$$\Omega_\pm = \mathbf{B} + \frac{m}{q_\pm} \nabla \times (G_\pm \Gamma_\pm \mathbf{v}_\pm) \quad . \quad (40)$$

(38) \rightarrow (9) \Rightarrow

$$U_{\pm\nu} n^\mu \xi_\pm^\nu + \alpha \Gamma_\pm \xi_\pm^\mu - U_{\pm\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Omega_{\pm\rho} n_\sigma = \frac{\nabla^\mu \mathcal{P}_\pm - m_\pm n_\pm \nabla^\mu G_\pm}{n_\pm} \quad . \quad (41)$$

(41)-ის γ_μ^β -ით პროექციით მივიღებთ იმპულსისთვის განტოლებას:

$$q_\pm \alpha \Gamma_\pm \xi_\pm + q_\pm \Gamma_\pm (\mathbf{v}_\pm \times \Omega_\pm) = \frac{1}{n_\pm} (\nabla \mathcal{P}_\pm - m_\pm n_\pm \nabla G_\pm) \quad . \quad (42)$$

$M_\pm^{\mu\nu}$ ტენზორის ანტისიმეტრიულობიდან $F^{\mu\nu}$ -ის ანალოგიურად მისი დუალური ტენზორისთვის $M_\pm^{*\mu\nu}$ მივიღებთ

$$\nabla_\nu M^{*\mu\nu} = 0 \quad , \quad (43)$$

სადაც

$$M_{\pm}^{*\mu\nu} = \Omega_{\pm}^{\mu} n^{\nu} - \Omega_{\pm}^{\nu} n^{\mu} - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \xi_{\pm\rho} n_{\sigma} . \quad (44)$$

რომლის ჰიპერზედაპირზე γ_{μ}^{β} -ით პროექციით, სივრცული ნაწილი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\frac{\partial \Omega_{\pm}}{\partial t} = -\nabla \times (\alpha \xi_{\pm}) . \quad (45)$$

(42) \rightarrow (55) \Rightarrow

$$\frac{\partial \Omega_{\pm}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_{\pm} \times \Omega_{\pm}) = -\nabla \times \frac{1}{q_{\pm} n_{\pm} \Gamma_{\pm}} (\nabla \mathcal{P}_{\pm} - m_{\pm} n_{\pm} \nabla G_{\pm}) , \quad (46)$$

რომელიც წარმოადგენს განზოგადოებული გრიგალის განტოლებას მარჯვენა მხარეში შესაძლო წყაროებით.

წონასწორულ მდგომარეობაში. როდესაც არ არის წყაროები, (46) განტოლება წარმოადგენს გრიგალის შენახვის განტოლებას:

$$\frac{\partial \Omega_{\pm}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v}_{\pm} \times \Omega_{\pm}) = 0 . \quad (47)$$

3. წონასწორული მდგომარეობები - განტოლებები, პირობები

ამ პარაგრაფში შევისწავლით წონასწორულ მდგომარეობებს ($\partial/\partial t \equiv 0$); მაშინ (47) -ის ამონახსნები აკმაყოფილებენ ე.წ. ბელტრამის პირობებს (იხ. [5] და მასში გამოყენებული ლიტერატურა) სითხის სიჩქარეები პარალელურია მათი შესაბამისი გრიგალის ($\Omega_{\pm} \parallel \mathbf{v}_{\pm}$), რომლებიც იმუშავებენ უწყვეტობის განტოლებასთან $\nabla \cdot (\alpha n_{\pm} \Gamma_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}) = 0$ და მაქსველის განტოლებებთან ერთად.

ამრიგად თითოეული სითხისთვის ბელტრამის პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\Omega_{\pm} = \Lambda_{\pm} \alpha \frac{n_{\pm}}{n_0} \Gamma_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} . \quad (48)$$

სადაც Λ_{\pm} კოეფიციენტი ბელტრამის პარამეტრებია რომლებიც დაკავშირებულია სისტემის ენერგიასთან და სპირალობასთან.

თუკი აღვადგენთ სინათლის სიჩქარეს განტოლებებში, (40) -ის ჩასმით (48) -ში მივიღებთ ბელტრამის პირობებს ელექტრონულ/პოზიტრონული სითხისთვის [6-8]:

$$\mathbf{B} \pm \frac{m_e c}{q} \nabla \times (G_{\pm} \Gamma_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}) = \Lambda_{\pm} \frac{n_{\pm}}{n_0} \alpha \Gamma_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} , \quad (49)$$

ხოლო ამპერის კანონია:

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = \frac{4\pi\alpha q}{c} (n_+ \Gamma_+ \mathbf{v}_+ - n_- \Gamma_- \mathbf{v}_-) \quad . \quad (50)$$

ელექტრონ-პოზიტრონული აკმაყოფილებს კვაზი-ნეიტრალურობის პირობას: $n_+ = n_- \equiv n$, აქედან გამომდინარე $G_+(n_+) = G_-(n_-) \equiv G(n)$. ამას გარდა, ვუშვებთ რომ $\Gamma_+(\mathbf{V}_+) \sim \Gamma_+(\mathbf{V}_+) \equiv \Gamma$ შესაბამისად (49) და (50) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\mathbf{B} \pm \frac{m_e c}{e} \nabla \times (G_{\pm} \Gamma_{\pm} \mathbf{v}_{\pm}) = \Lambda_{\pm} \frac{n}{n_0} \alpha \Gamma \mathbf{v}_{\pm} \quad , \quad (51)$$

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{B}) = \frac{4\pi\alpha e n \Gamma}{c} (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \quad , \quad (52)$$

სადაც ∇ -ები შეიცავს მეტრიკის ელემენტებს. ყველა გრადიენტი დავანორმიროთ ვარსკვლავის რადიუსზე r_0 , სიმკვრივე - ფონურ სიმკვრივეზე n_0 , მაგნიტური ველი გარემოს მახასიათებელ ველზე B_0 ; ყველა სიჩქარე გაზომილია შესაბამისი ალფენის სიჩქარით $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_0 G_0 m_e}}$;

$\chi = \lambda_s / r_0$ სადაც $\lambda_s = c / \sqrt{4\pi e^2 n_0 / G_0 m_e}$, $G_0 \equiv G(n_0)$ ქვევით ყველა დანორმირებული უგანზომილებო სიდიდე აღნიშნულია თავზე ხაზით $\bar{n}, \bar{v}, \bar{\mathbf{B}}$ (მაგ. $\bar{G} \equiv G(n) / G_0$

$$\bar{\mathbf{B}} \pm \chi \bar{\nabla} \times (\bar{G} \Gamma \bar{\mathbf{v}}_{\pm}) = a_{\pm} \alpha \bar{n} \Gamma \bar{\mathbf{v}}_{\pm} \quad , \quad (53)$$

ხოლო ამპერის განტოლება

$$\chi \bar{\nabla} \times (\alpha \bar{\mathbf{B}}) = \alpha \Gamma \bar{n} (\bar{\mathbf{v}}_+ - \bar{\mathbf{v}}_-) \quad . \quad (54)$$

შემოვიყვანოთ უგანზომილებო ელექტრონ-პოზიტრონების, როგორც ერთიანის სიჩქარე [7]

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{m_+ \Gamma_+ \bar{\mathbf{v}}_+ + m_- \Gamma_- \bar{\mathbf{v}}_-}{m_+ \Gamma_+ + m_- \Gamma_-} \quad , \quad (55)$$

და ვინაიდან $m_+ = m_- = m_e$, მივიღებთ:

$$\bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{v}}_+ + \bar{\mathbf{v}}_-) \quad . \quad (56)$$

(53), (54), (56) განტოლებებიდან, და დაშვებით რომ $a_+, a_- \equiv const$ მივიღებთ ე.წ. სამმაგ ბელტრამის (TB) განტოლებას:

$$\begin{aligned} \chi^3 \bar{\mathbf{V}} \times \alpha \bar{\nabla} \times \frac{\bar{G}}{\alpha \bar{n}} \bar{\nabla} \times (\bar{G} \Gamma \bar{\mathbf{V}}) - (a_+ - a_-) \chi^2 \bar{\mathbf{V}} \times \alpha \bar{\nabla} \times (\bar{G} \Gamma \bar{\mathbf{V}}) + \\ + \chi \bar{\nabla} \times (2\bar{G} - a_+ a_- \alpha^2 \bar{n}) \Gamma \bar{\mathbf{V}} - (a_+ - a_-) \alpha \bar{n} \Gamma \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad . \quad (57) \end{aligned}$$

ქვევით განვიხილავთ კერძო შემთხვევას, როცა $a_+ \sim a_- \equiv a$. მაშინ (69) განტოლებიდან მიიღება რელატივისტური ორმაგი ბელტრამის (DB) განტოლება გადაგვარებული e-p სითხისთვის რელატივისტური გრავიტაციის გათვალისწინებით (α და ∇ -ებით)

$$\chi^2 \alpha \bar{V} \times \frac{\bar{G}}{\alpha \bar{n}} \bar{V} \times (\bar{G} \Gamma \bar{V}) + (2\bar{G} - a^2 \alpha^2 \bar{n}) \Gamma \bar{V} = 0 \quad . \quad (58)$$

ბერნულის განტოლება მიიღება სტანდარტული პროცედურით მოძრაობის განტოლების (9) - ის t^μ -ზე პროექციით [8]. სტაციონარულ შემთხვევაში ბერნულის განტოლება თითოეული სითხისათვის ჩაიწერება

$$U_\pm^\nu \nabla_\nu (-q_\pm t^\mu P_{\pm\mu}) = 0 \quad , \quad (59)$$

სადაც შემოვიყვანეთ აღნიშვნა

$$P_{\pm\mu} = A_\mu + \frac{m}{q_\pm} G U_{\pm\mu} \quad , \quad (60)$$

რაც თავის მხრივ ნიშნავს რომ $-q_\pm t^\mu P_{\pm\mu}$ სიდიდე მუდმივია U_\pm^ν ოთხ-სიჩქარის გასწვრივ თითოეული სითხისთვის მიღებული სიჩქარის გასწვრივ შენახვადი სიდიდეების შეკრებით მივიღებთ შენახვად სიდიდეს, რომელიც მუდმივია ელექტრონ-პოზიტრონის, როგორც ერთიანის მოძრაობის სიჩქარის გასწვრივ

$$\alpha^2 \bar{G} \Gamma = const \quad . \quad (61)$$

ზედა მუდმივის საპოვნელად ვუშვებთ, რომ რაღაც სიმაღლეზე $r = r_*$ (ვარსკვლავის ზედაპირის ახლოს), სიმკვრივე აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას $n = n_*$ და შესაბამისი სიჩქარე კი მინიმუმია $V_* \sim 0$ [6]. შედეგად მივიღებთ:

$$const = \alpha_* \bar{G}_* \quad . \quad (62)$$

(62) -ის გამოყენებით (61)-ში მივიღებთ გამოსახულებას ლორენცის ფაქტორისთვის

$$\Gamma = \frac{\alpha_* \bar{G}_*}{\alpha^2 \bar{G}} \quad . \quad (63)$$

ხოლო უგანზომილებო სიჩქარისთვის კი

$$\bar{V}^2 \sim \mu_0 \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \bar{G}^2}{\alpha_*^2 \bar{G}_*^2} \right) \quad , \quad (64)$$

სადაც

$$\mu_0 = \frac{c^2}{V_A^2} \quad . \quad (65)$$

ამოსახსნელია (58) და (64) (65)-ით რათა ვიპოვოთ ერთიანი სიჩქარე V .

4. მრუდე სივრცეში გადაგვარებული e-p პლაზმის დინამიკის აღმწერი განტოლებები სფერულ კოორდინატებში

გამომდინარე აღსაწერი ობიექტის გეომეტრიიდან და დაკვირვებებიდან, (58) განტოლების კომპონენტები ჩავწერთ სფერულ კოორდინატებში. განვიხილავთ ღერძული სიმეტრიის გარედინების შესაძლო ფორმირებას, შესაბამისად სიდიდეები არ არიან პოლარულ კუთხეზე დამოკიდებულები. (A. 3) – (A. 9), (A. 11), (63) გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

სიჩქარის ველის DB განტოლების r კომპონენტისათვის

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\bar{G}}{\bar{n}} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\bar{V}_\theta}{\alpha^2} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\bar{V}_r}{\alpha^3} \right) \right] \right) + \frac{R^2}{\chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \frac{\bar{V}_r}{\alpha^3} = 0 , \quad (66)$$

სიჩქარის ველის DB განტოლების θ კომპონენტისათვის

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\sin\theta \frac{\bar{G}}{\bar{n}} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\bar{V}_\theta}{\alpha^2} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\bar{V}_r}{\alpha^3} \right) \right] \right) - \frac{r}{\chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \sin\theta \frac{\bar{V}_\theta}{\alpha^4} = 0 , \quad (67)$$

სიჩქარის ველის DB განტოლების ϕ კომპონენტისათვის

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial R} (R \bar{V}_\phi) \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \bar{V}_\phi) \right) - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \bar{V}_\phi = 0 . \quad (68)$$

გამოსახულებების გამარტივების მიზნით შემოვიყვანოთ ახალი აღნიშვნები:

$$\hat{V}_r = \bar{V}_r / \alpha^3, \quad \hat{V}_\theta = \sin\theta \bar{V}_\theta / \alpha^2, \quad \hat{V}_\phi = \sin\theta \bar{V}_\phi / \alpha^2. \quad (69)$$

ახალ ცვლადებში (66) – (68) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

r კომპონენტი

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{V}_\theta) - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \hat{V}_r \right] \right) + \frac{R^2}{\chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_r = 0 , \quad (70)$$

θ კომპონენტი

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{V}_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} \hat{V}_r \right] \right) - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_\theta = 0 , \quad (71)$$

ϕ კომპონენტი

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial R} (R \hat{V}_\phi) \right) + \frac{1}{R \alpha^2} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \hat{V}_\phi \right) - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_\phi = 0 . \quad (72)$$

კომპაქტური ობიექტის გრავიტაციის სიმეტრიიდან და ნაკადის შენახვის განტოლებიდან, ბერნულის განტოლებიდან გამომდინარე ვუშვებთ , რომ სიმკვრივე იცვლება მხოლოდ რადიალურად $n = n(R)$. შესაბამისად

$\bar{G} = \bar{G}(\bar{n}(R))$, და გავშლით სიჩქარის კომპონენტებს (რომლებსაც ვუშვებთ რომ ფუნქციებია r და θ კოორდინატების, $\partial_\phi \equiv 0$) სფერული ჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით:

$$\hat{V}_l(R, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{V}_{il}(R) Y_l^i(\theta, \phi) \quad , \quad i = \overline{r, \theta, \phi} \quad . \quad (73)$$

r კომპონენტი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{\cos^2 \theta - 1} \left[\cos \theta Y_l^0(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \right] \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\theta l}(r)) + l(l+1) Y_l^0(\theta, \phi) \hat{V}_{rl}(r) \\ + \frac{\bar{n} R^2}{\bar{G} \chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] Y_l^0(\theta, \phi) \hat{V}_{rl}(r) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (74)$$

θ კომპონენტი

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\theta l}(R)) \right] Y_l^0(\theta, \phi) + (l+1) \left[\cos \theta Y_l^0(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \right] \frac{d}{dR} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \hat{V}_{rl}(R) \right) \\ - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] Y_l^0(\theta, \phi) \hat{V}_{rl}(R) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (75)$$

ϕ კომპონენტი

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\phi l}(r)) \right] Y_l^0(\theta, \phi) \\ - \frac{(l+1) \bar{G}}{R \alpha^2 \bar{n}} \left(l Y_l^0(\theta, \phi) + \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta - 1} \left[\cos \theta Y_l^0(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \right] \hat{V}_{\phi l}(R) \right) \\ - \frac{r}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] Y_l^0(\theta, \phi) \hat{V}_{\phi l}(r) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (76)$$

(74) – (76) განტოლებებიდან მივიღებთ:

r კომპონენტი

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(\theta, \phi) \cos \theta A_l(R) + Y_l^0(\theta, \phi) (\cos^2 \theta - 1) B_l(R) - Y_{l+1}^0(\theta, \phi) C_l(R) = 0 \quad , \quad (77)$$

θ კომპონენტი

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(\theta, \phi) D_l(R) + Y_l^0(\theta, \phi) \cos \theta E_l(R) - Y_{l+1}^0(\theta, \phi) F_l(R) = 0 \quad , \quad (78)$$

ϕ კომპონენტი

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(\theta, \phi) (\cos^2 \theta - 1) g_l(R) - Y_l^0(\theta, \phi) \cos^2 \theta H_l(R) - Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \cos \theta I_l(R) = 0 \quad . \quad (79)$$

სადაც

$$A_l(R) = (l+1) \cos \theta \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\theta l}(R)) \quad , \quad (80)$$

$$B_l(R) = \left(l(l+1) + \frac{\bar{n} R^2}{\bar{G} \chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \right) \hat{V}_{r l}(R) \quad , \quad (81)$$

$$C_l(R) = (l+1) \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\theta l}(R)) \quad , \quad (82)$$

$$D_l(R) = \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\theta l}(R)) \right] - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{\theta l}(R) \quad , \quad (83)$$

$$E_l(R) = (l+1) \frac{d}{dR} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \hat{V}_{r l}(R) \right) \quad , \quad (84)$$

$$F_l(R) = (l+1) \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \frac{d}{dR} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \hat{V}_{r l}(R) \right) \quad , \quad (85)$$

$$g_l(R) = \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} (R \hat{V}_{\phi l}(R)) \right] - \left(\frac{l(l+1) \bar{G}}{R \alpha^2 \bar{n}} + \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \right) \hat{V}_{\phi l}(R) \quad , \quad (86)$$

$$H_l(R) = \frac{2(l+1) \bar{G}}{R \alpha^2 \bar{n}} \hat{V}_{\phi l}(R) \quad , \quad (87)$$

$$I_l(R) = \frac{2(l+1) \bar{G}}{R \alpha^2 \bar{n}} \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \hat{V}_{\phi l}(R) \quad , \quad (88)$$

პულსარის მაგნიტური ველის გეომეტრიიდან გამომდინარე (დიპოლური ველი) ფორმირებული გამოტყორცნილი დინება მოსალოდნელია პოლუსებთან ახლოს, რომელსაც

აქვს გარკვეული გაშლის კუთხე პოლარულ ღერძთან, შესაბამისად წინა გამოთვლებში ყველგან დავუშვიტ რომ $0 < \theta < \pi$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$,

(77) – (79)-ის ინტეგრებით და (B. 10) – (B. 12) გამოყენებით მივიღებთ:

r კომპონენტი

$$\frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\theta l}(R) \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{n} R^2}{\bar{G} \chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{r0}(R) + \frac{1}{\sqrt{15}} \left(6 + \frac{\bar{n} R^2}{\bar{G} \chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \right) \hat{V}_{r2}(R) = 0 \quad , \quad (89)$$

θ კომპონენტი

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\theta 0}(R) \right) \right] - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{\theta 0}(R) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{r1}(R) \right) = 0 \quad , \quad (90)$$

ϕ კომპონენტი

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\phi 0}(R) \right) \right] - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{\phi 0}(R) - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} \left(r \hat{V}_{\phi 2}(R) \right) \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{12}{R \alpha^2} \frac{\bar{G}}{\bar{n}} + \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \right) \hat{V}_{\phi l}(R) \quad . \end{aligned} \quad (91)$$

კომპაქტური ობიექტის გრავიტაციული და მაგნიტური ველის სიმეტრიებიდან გამომდინარე განვიხილავთ სფერულად სიმეტრიულ და დიპოლურ მომენტების მიახლოებას, რის შედეგადაც მივიღებთ:

r კომპონენტი

$$\frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\theta l}(R) \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{n} R^2}{\bar{G} \chi_s^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{r0}(R) = 0 \quad , \quad (92)$$

θ კომპონენტი

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\theta 0}(R) \right) \right] - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{\theta 0}(R) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{r1}(R) \right) = 0 \quad , \quad (93)$$

ϕ კომპონენტი

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \frac{d}{dR} \left(R \hat{V}_{\phi 0}(R) \right) \right] - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \hat{V}_{\phi 0}(R) = 0 \quad . \quad (94)$$

უწყვეტობის განტოლება სტაციონარული დინებისთვის (51) ფორმულიდან

$$\nabla \cdot (\alpha \bar{n} \Gamma \mathbf{V}) = 0 \quad . \quad (95)$$

(63) \rightarrow (95) \Rightarrow

$$\nabla \cdot \left(\frac{\bar{n}}{\alpha \bar{G}} \mathbf{V} \right) = 0 \quad . \quad (96)$$

ღერძული სიმეტრიის გათვალისწინებით უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial \left(\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}} \frac{\bar{n}}{\alpha \bar{G}} V_r \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\sqrt{g_{rr}g_{\phi\phi}} \frac{\bar{n}}{\alpha \bar{G}} V_\theta \right)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad . \quad (97)$$

(97) =>

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \alpha^2 \hat{V}_r \right) + \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{V}_\theta = 0 \quad , \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \alpha^2 \hat{V}_r \right) Y_l^0(\theta, \phi) - \frac{(l+1)}{\cos^2 \theta - 1} \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \left[\cos \theta Y_l^0(\theta, \phi) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \right] \hat{V}_{\theta l}(R) \\ - \frac{R}{\chi_s^2 \alpha^2} \left[2 - \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] Y_l^0(\theta, \phi) \hat{V}_{\phi l}(R) = 0 \quad , \quad (99) \end{aligned}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(\theta, \phi) (\cos^2 \theta - 1) J_l(R) + Y_l^0(\theta, \phi) \cos \theta K_l(R) - Y_{l+1}^0(\theta, \phi) L_l(R) = 0 \quad . \quad (100)$$

(100)-ის $\sin \theta d\theta$ -ზე გამრავლებით და ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \alpha^2 \hat{V}_{r0}(R) \right) + \sqrt{3} R \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \hat{V}_{\theta 1}(R) = 0 \quad . \quad (101)$$

ბერნულის განტოლებიდან (64)

$$\bar{V}_r^2 + \bar{V}_\theta^2 + \bar{V}_\phi^2 = \mu_0 \alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \bar{G}^2}{\alpha_*^2 \bar{G}_*^2} \right) \quad . \quad (102)$$

(69), (73) → (102) და შვეინარჩუნოთ მხოლოდ პირველი ორი მომენტი $\hat{V}_{r\theta\phi}(r, \theta) =$

$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \bar{V}_0^{r,\theta,\phi}(R) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cos \theta \bar{V}_1^{r,\theta,\phi}(R)$. ბერნულის განტოლებას მივიღებთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \left\{ \frac{1}{4\pi} \hat{V}_{r0}^2(R) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos \theta \hat{V}_{r0}(R) \hat{V}_{r1}(R) + \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta \hat{V}_{r1}^2(R) \right\} \\ + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left\{ \frac{1}{4\pi} \hat{V}_{\theta 0}^2(R) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos \theta \hat{V}_{\theta 0}(R) \hat{V}_{\theta 1}(R) + \frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta \hat{V}_{\theta 1}^2(R) \right\} + \\ \frac{1}{4\pi \sin^2 \theta} \hat{V}_{\phi 0}^2(R) = \frac{\mu_0}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 \bar{G}^2}{\alpha_*^2 \bar{G}_*^2} \right) \quad . \quad (103) \end{aligned}$$

(103) განტოლების $\sin^2 \theta$ -ზე გამრავლებით და სხეულოვანი კუთხით ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\alpha^2 \hat{V}_{r0}^2(R) + \frac{1}{5} \alpha^2 \hat{V}_{r1}^2(R) + \frac{3}{2} \hat{V}_{\theta 1}^2(R) + 6\pi \hat{V}_{\theta 0}^2(R) + 6\pi \hat{V}_{\phi 0}^2(R) = \frac{4\pi \mu_0}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 \bar{G}^2}{\alpha_*^2 \bar{G}_*^2} \right) \quad (104)$$

5. გადაგვარებული რელატივისტური e-p პლაზმის გამოტყორცნილი დინების ამონახსნი კომპაქტური ობიექტის ზედაპირთან ახლოს.

(92) – (94), (101) განტოლებებიდან მივიღებთ:

r კომპონენტი

$$\frac{d\hat{V}_{\theta 1}}{dR} = -\frac{1}{R}\hat{V}_{\theta 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\frac{R}{\chi^2}\left[2 - a^2\alpha^2\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right]\hat{V}_{r0} \quad , \quad (105)$$

θ კომპონენტი

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{V}_{\theta 0}}{dR^2} + \frac{1}{R}\left\{\left[2 + R\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}}\right)\right]\frac{d\hat{V}_{\theta 0}}{dR} + \left(\frac{d}{dR}\left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}}\right) - \frac{R}{\chi^2}\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\frac{1}{\alpha^2}\left[2 - a^2\alpha^2\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right]\right)\hat{V}_{\theta 0}(r)\right\} \\ = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{R}\left[\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}}\right)\hat{V}_{r1} + \frac{d\hat{V}_{r1}}{dR}\right] \quad , \quad (106) \end{aligned}$$

ϕ კომპონენტი

$$\frac{d^2\hat{V}_{\phi 0}}{dR^2} + \frac{1}{R}\left\{\left[2 + R\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}}\right)\right]\frac{d\hat{V}_{\phi 0}}{dR} + \left(\frac{d}{dR}\left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}}\right) - \frac{R}{\chi^2}\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\frac{1}{\alpha^2}\left[2 - a^2\alpha^2\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right]\right)\hat{V}_{\phi 0}(r)\right\} = 0 \quad . \quad (107)$$

უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{d\hat{V}_{r0}}{dR} = -\frac{1}{R\alpha^2}\left\{\left[2\left(1 - \frac{r_s/2r_0}{R}\right) + R\alpha^2\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right)\right]\hat{V}_{r0} + \sqrt{3}\hat{V}_{\theta 1}\right\} = 0 \quad . \quad (108)$$

(105), (108) განტოლებებიდან $\hat{V}_{\theta 1}$ -ის გამორიცხვით მივიღებთ განტოლებას \hat{V}_{r0} -სთვის

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{V}_{r0}}{dR^2} + \left(\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right) + \frac{2}{R}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right)\frac{d\hat{V}_{r0}}{dR} \\ + \left(\frac{d^2}{dR^2}\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right) + \frac{2}{R}\frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right)\left(1 + \frac{r_s/2r_0}{R\alpha^2}\right) + \frac{2}{R} + \frac{1}{\chi^2}\frac{1}{\alpha^2}\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\left[2 - a^2\alpha^2\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right]\right)\hat{V}_{r0} \\ = 0 \quad . \quad (109) \end{aligned}$$

სიმარტივისთვის შემოვიფარგლოთ სფერულად სიმეტრიული დინებით (106) განტოლებაში მარჯვენა წევრი, რომელიც ასრულებს გარეშე ძალის როლს, გაქრება). ამ შემთხვევაში

(107) – (109) განტოლებებს აქვთ შემდეგი ზოგადი სახე:

$$\frac{d^2\hat{V}}{dR^2} + f\frac{d\hat{V}}{dR} + \omega^2\hat{V} = 0 \quad , \quad (110)$$

სადაც (106), (107) შემთხვევაში

$$f = \frac{2}{R} - \frac{d}{dR}\ln\left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}}\right) \quad , \quad (111)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \ln \left(\frac{\bar{G}}{\bar{n}} \right) - \frac{1}{\chi^2} \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \frac{1}{\alpha^2} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \quad , \quad (112)$$

ხოლო (109) განტოლებისთვის

$$f = \frac{2}{R} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{d}{dR} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) \quad , \quad (113)$$

$$\omega^2 = \frac{d^2}{dR^2} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) \left(1 + \frac{r_s/2r_0}{R\alpha^2} \right) + \frac{2}{R} + \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \quad . \quad (114)$$

(110)-ში ჰარმონიული ოსცილატორის შესაბამისი სახის განტოლების მისაღებად ვიყენებთ შემდეგი სახის ცვლადის გარდაქმნას:

$$\hat{V} = \tilde{V} \exp \left(-\frac{1}{2} \int f dR \right) \quad . \quad (115)$$

(115) გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\hat{V}_{r_0} = \tilde{V}_{r_0} \frac{1}{R\alpha^2} \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{n}}} \quad , \quad \hat{V}_{\theta_0} = \tilde{V}_{\theta_0} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\bar{n}}{\bar{G}}} \quad , \quad \hat{V}_{\phi_0} = \tilde{V}_{\phi_0} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\bar{n}}{\bar{G}}} \quad . \quad (116)$$

(116) \rightarrow (106), (107), (109) \Rightarrow

$$\frac{d^2 \tilde{V}_{r_0}}{dR^2} + \bar{\Omega}^2 \tilde{V}_{r_0} = 0 \quad , \quad (117)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}_{\theta_0}}{dR^2} + \Omega^2 \tilde{V}_{\theta_0} = 0 \quad , \quad (118)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}_{\phi_0}}{dR^2} + \Omega^2 \tilde{V}_{\phi_0} = 0 \quad , \quad (119)$$

სადაც

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dR^2} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dR} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) \right)^2 + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{r_s/2r_0}{R\alpha^2} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \quad , \quad (120)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dR^2} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dR} \ln \left(\frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right) \right)^2 - \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \left[2 - a^2 \alpha^2 \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \right] \quad . \quad (121)$$

ნეიტრონულ ვარსკვლავის გარე შრეში ზედაპირთან ახლოს არის e-p გაზის მაღალი სიმკვრივე რომლის აღსაწერადაც გამოვიყენებთ ულტრა-რელატივისტურ მიახლოებას

$$\bar{G} \approx \bar{n}^{1/3} \quad , \quad \frac{\bar{n}}{\bar{G}} \approx \bar{n}^{2/3} \quad . \quad (122)$$

ამ მიახლოებაში (120), (121) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{3} \frac{d^2}{dR^2} \ln \bar{n} - \frac{1}{9} \left(\frac{d}{dR} \ln \bar{n} \right)^2 + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{r_s/2r_0}{R\alpha^2} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{\alpha^2} \bar{n}^{2/3} \left[2 - a^2 \alpha^2 \bar{n}^{2/3} \right] \quad , \quad (123)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{3} \frac{d^2}{dR^2} \ln \bar{n} - \frac{1}{9} \left(\frac{d}{dR} \ln \bar{n} \right)^2 - \frac{1}{\chi^2} \frac{1}{\alpha^2} \bar{n}^{2/3} [2 - a^2 \alpha^2 \bar{n}^{2/3}] \quad . \quad (124)$$

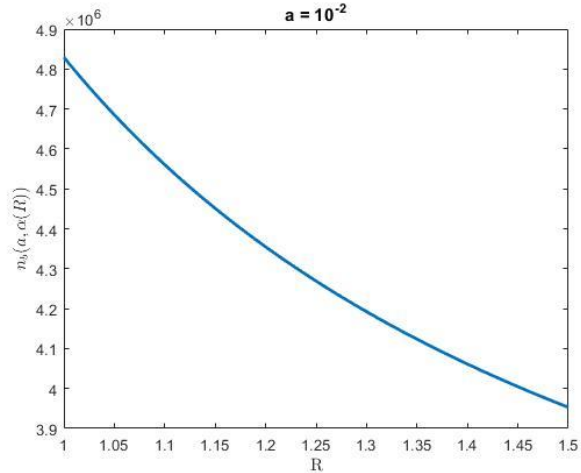
გარედინება შეიძლება ფორმირდეს თუკი

$$\bar{\Omega}^2 \leq 0 \quad . \quad (125)$$

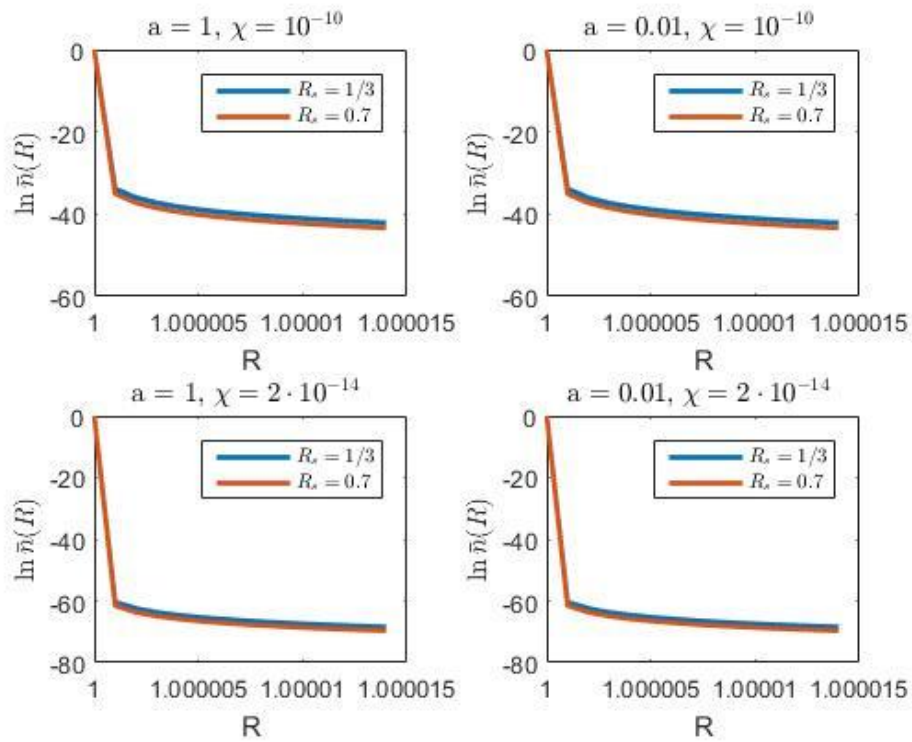
$\bar{\Omega}^2 \sim [2 - a^2 \alpha^2 \bar{n}^{2/3}] = 0$ ((123) განტოლების ბოლო წევრი ნულია როდესაც TB/DB ეფექტები უგულვებელყოფილია) გვამღვეს ზღვრული სიმკვრივეს, რომლის ზევითაც ამონახსნი არაფიზიკურია. ნახ.1 -ზე აგებულია დანორმირებული ზღვრული სიმკვრივე \bar{n}_b უგანზომილებო R -ზე.

გადაგვარებული e-p გაზი რელატივისტურია მაშინ, როდესაც $n_0 \geq 10^{32}$, რომლისთვისაც სკინის სიღრმე $\lambda_s \leq 10^{-10}$ სმ. ნეიტრონული ვარსკვლავის რადიუსი $r_0 \leq 10^6$ სმ, შესაბამისად $\chi \leq 10^{-16}$. ადრინდელ კვლევებში ნაჩვენებია, რომ მიუხედავად სიმციროსა ორმაგი/სამმაგი როტორის ეფექტები ენერგიის გარდაქმნაში მნიშვნელოვანია. აქედან გამომდინარე ჩვენ შემთხვევაშიც ველოდებით რომ მაღალი რიგის წარმოებულებიანი წევრები იმუშავებენ ვარსკვლავის ზედაპირთან ახლოს და კომპაქტური ობიექტის ზედაპირთან ახლოს მოხდება სწრაფი ამოტყორცნილი დინებისა და ძლიერი მაგნიტური ველების ფორმირება რელატივისტურ გადაგვარებულ e-p პლაზმაში - ნახ.2 ნათლად გვიჩვენებს სხვაობას ნახ.1-ზე გამოსახულ ზღვრულ სიმკვრივესთან: სიმკვრივეს დაცემა გაცილებით სწრაფად ხდება ზედაპირთან უფრო ახლოს. როგორც ნახ.2-დან ჩანს, მანძილს, რომელზეც ხდება სიმკვრივის სწრაფი ვარდნა, ასევე სიდიდეს განსაზღვრავს χ პარამეტრის სიდიდე, შედარებით სუსტი დამოკიდებულებაა გრავიტაციულ პარამეტრზე (განხილულია დაკვირვებული ნეიტრონული ვარსკვლავის $R_s = 1/3$ და თეორიულად ნაჩვენებ კომპაქტური ობიექტის ზედა ზღვრულ მნიშვნელობის შემთხვევა $R_s = 0.7$ [16], ხოლო სიმკვრივის ცვლილება სიმაღლის მიხედვით პრაქტიკულად დამოკიდებული არ არის ბელტრამის პარამეტრზე.

$$\bar{n}_b = \frac{2^{3/2}}{a^3 \alpha^3(R)} \quad . \quad (126)$$



ნახ.1 უგანზომილებო ზღვრული სიმკვრივის \bar{n}_b -ს დამოკიდებულება უგანზომილებო რადიალურ მანძილ R



ნახ.2 $\bar{\Omega}^2 = 0$ განტოლების ამონახსნი ((130) განტოლება) უგანზომილებო სიმკვრივის \bar{n} -ს დამოკიდებულება უგანზომილებო რადიალურ მანძილზე R -ზე პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის

და მთლიანი სიმკვრივე წარმოვადგინოთ ზღვრული სიმკვრივისა და მისგან გადახრის საშუალებით:

$$\bar{n} = \bar{n}_b + \bar{n}_1 \geq 0 \quad (127)$$

და მოვახდენთ რა (123) პირობის რეფორმულირებას სიმცირის პარამეტრით $\chi \sim 10^{-16} \ll 1$ მიხედვით პულსარისთვის პარამეტრებით $n_0 = 10^{32} \text{ სმ}^{-3}$, $B_0 \sim 10^{12} \text{ G}$ და დავუშვებთ რომ:

$$\frac{d\bar{n}_b}{dR} \ll \frac{d\bar{n}_1}{dR} \quad , \quad (128)$$

$$\frac{d\bar{n}_1}{dR} = \frac{1}{\chi} F(R) \quad , \quad (129)$$

$$\frac{d^2\bar{n}_1}{dR^2} \ll \left(\frac{d\bar{n}_1}{dR}\right)^2 \quad , \quad (130)$$

$$\bar{n}_1 \equiv \frac{1}{\chi} \int F(R) dR + C \quad , \quad (131)$$

შედეგად მივიღებთ:

$$F^2(R) > \frac{9}{4} \frac{1}{\alpha^2} \bar{n}^{8/3} [2 - a^2 \alpha^2 \bar{n}^{2/3}] \quad , \quad (132)$$

რომელიც შეიძლება დაკმაყოფილდეს ორ შემთხვევაში:

$$\begin{cases} 2 - a^2 \alpha^2 (\bar{n}_b + \bar{n}_1)^{2/3} < 0 \\ 2 - a^2 \alpha^2 (\bar{n}_b + \bar{n}_1)^{2/3} > 0 \end{cases} \quad (133)$$

პირველი შემთხვევა კმაყოფილდება, როდესაც:

$$\bar{n}_1 > 0 \quad , \quad (134)$$

რაც არ შეესაბამება საძიებელ ობიექტებს (არაფიზიკურია), მიუხედავად იმისა რომ (132) იგივეურად კმაყოფილდება.

მეორე შემთხვევა სამართლიანია, თუკი:

$$-\bar{n}_b < \bar{n}_1 < 0 \quad . \quad (135)$$

სიმკვრივის ქვევიდან შემოსაზღვრა განაპირობა ფიზიკურმა მოთხოვნამ - სრული სიმკვრივე დადებითი უნდა იყოს. ამ შემთხვევაში (132) კმაყოფილდება თუკი:

$$F^2(R) > 18 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \frac{1}{\alpha^8 \alpha^{10}(R)} \quad , \quad (136)$$

რომლის ორივე მხრიდან ფესვის აღებით და ინტეგრებით მივიღებთ პირობას:

$$\bar{n}_1 > \bar{n}_{1cr} \quad , \quad (137)$$

სადაც

$$\bar{n}_{1cr} = \sqrt{18 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \frac{1}{\chi \alpha^4} \left[5R_s \ln(R\alpha^2(R)) - \frac{10R_s^2}{R\alpha^2(R)} - \frac{5R_s^3}{R^2\alpha^4(R)} - \frac{5R_s^4}{3R^3\alpha^6(R)} - \frac{R_s^5}{4R^4\alpha^8(R)} + R \right]} \quad (138)$$

რომელშიც შემოვიტანეთ აღნიშვნა

$$R_s = \frac{r_s}{r_0} \quad . \quad (139)$$

შეგვიძლია განვსაზღვროთ რადიუსი R_{cr} სადაც სიმკვრივე შეიძლება შეიცვალოს ზღვრული მნიშვნელობიდან, შემდეგი პირობით:

$$\bar{n}_1(R_{cr}) + \bar{n}_b(R_{cr}) = 0 \quad (140)$$

რაც გვიჩვენებს რომ სიმკვრივის გადახრა არ აღემატება სიმკვრივის ზღვრულ მნიშვნელობას. ამრიგად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ სიმკვრივის გადახრა ლოკალიზებულია კრიტიკულ სიმკვრივეზე კრიტიკულ მანძილზე/სიმაღლეზე და განისაზღვრება შემდეგი სახით

$$\bar{n}_1(R) = \begin{cases} 0, & R < R_L \\ -\epsilon \bar{n}_b(R), & R_L \leq R \leq R_R \\ 0, & R > R_R \end{cases} \quad , \quad (141)$$

სადაც $R_L = R_{cr}$ წარმოადგენს რადიუსს სადაც არსებობს სიმკვრივის შეშფოთება, $\Delta R = R_R - R_L$ არის ღრეჩოს სიგანე, ხოლო $\epsilon < 1$ განსაზღვრავს ამ შეშფოთების ამპლიტუდას (სრული სიმკვრივე ≥ 0 და ასეთ პირობებში იგი ფიზიკური რჩება).

თუკი ვუგულებელვყოფთ F^2 პროპორციულ წევრს, და გავშლით სიმკვრივეს სიმცირის პარამეტრით ($\epsilon = -\bar{n}_1/\bar{n}_b$) მივიღებთ:

$$\bar{\Omega}^2 \approx \frac{1}{\alpha^2} \bar{n}^{2/3} [2 - \alpha^2 \bar{n}^{2/3}] \quad . \quad (142)$$

სიჩქარის რადიალური კომპონენტის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ WKB (ვენცელ-კრამერს-ბრიულინი) მიახლოებას და

$$\tilde{V}_{r0} \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp\left(\int \Omega(R) dR\right) \quad , \quad (143)$$

რომელიც დიდი სიზუსტით სამართლიანია, რამდენადაც პირობა:

$$|\bar{\Omega}'| \ll \bar{\Omega}^2 \quad (144)$$

მაღალი სიზუსტით კმაყოფილდება (ϵ აღნიშნავს $\frac{d}{dR}$ -ს)

$$\alpha \chi \ll \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{R_s} \epsilon^{1/2} \quad (145)$$

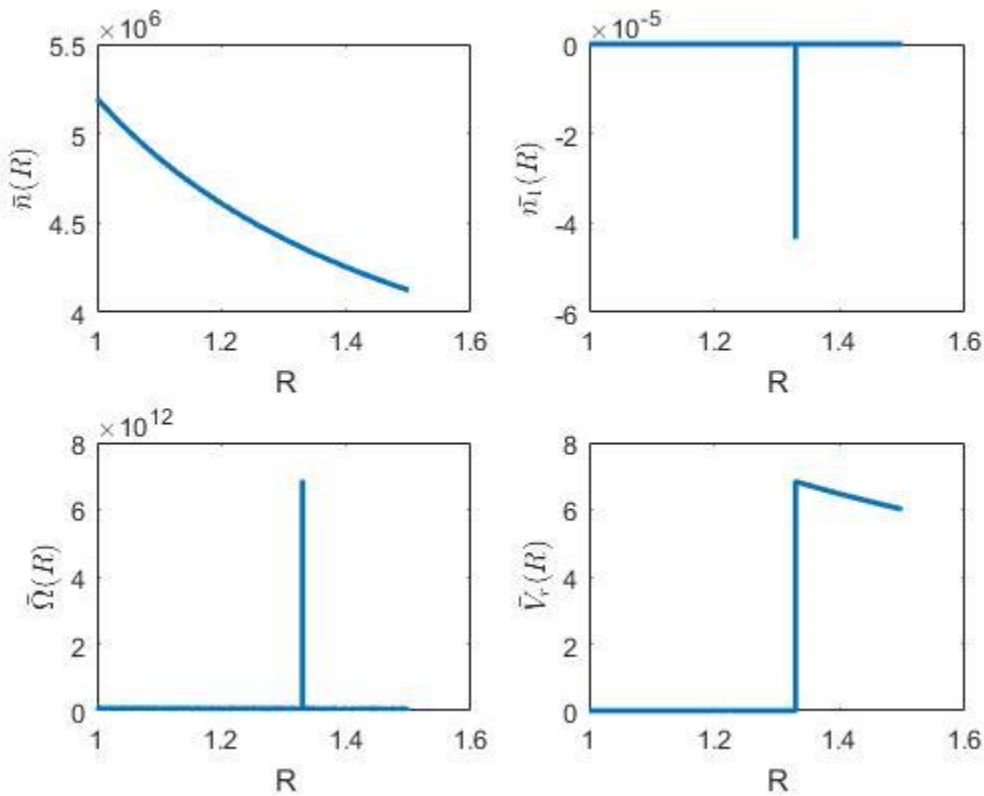
χ პარამეტრის სიმცირის გამო.

გამოტყორცნილი დინების სიჩქარის რადიალური კომპონენტი მიიღება (69),(116)

გარდაქმნებით:

$$\bar{V}_r = \frac{1}{R^2} \alpha(R) \frac{1}{\bar{n}^{1/3}} \tilde{V}_{r0} \quad . \quad (146)$$

საიდანაც ნათლად ჩანს, რომ სიმკვრივის მკვეთრ დაცემისას ხდება კრიტიკულ უბანში მკვეთრი რადიალური დინების ფორმირება; ასევე მნიშვნელოვანია რომ გამოტყორცნილი დინების სიჩქარის რადიალური კომპონენტი პროპორციულია გრავიტაციის ფუნქციის $\alpha(R)$ - ის, რომელიც მუშაობს ორმაგი ბელტრამის ეფექტებთან (\bar{n} -ის საშუალებით) ერთად; აღსანიშნავია, რომ ამოტყორცნილი დინება ლოკალიზებულია კრიტიკულ უბანში და შემოსაზღვრულია მაქსიმალური სიჩქარით, შემდგომ რადიალური სიჩქარე მცირდება თანდათანობით. ნახ.3 გვიჩვენებს ზემოთ აღნიშნული ამოცანის ამონახსნს $\Lambda_{\pm} = 100$ -სთვის, რაც შეესაბამება $a = 10^{-2}$ -ს. აღწერილ ძლიერი/სწრაფი ამოტყორცნილი დინების ფორმირების პრობლემაში ორმაგი /სამმაგი ბელტრამის ეფექტები (მაგნიტო-სითხური კავშირი) როგორც ზევით ნაჩვენები განტოლებებიდან ჩანს (რომელნიც უნდა ამოგვეხსნა), თამაშობს განმსაზღვრელ როლს (ამ ეფექტების გარეშე ამოტყორცნა სწრაფი გარედინებისა არ არსებობს, დინება სუსტი და გლუვი კი იქნება მაგრამ არა ძლიერი და ახლოს ზედაპირთან). ვარსკვლავისთვის განვიხილავთ მაგნიტურ ველს $B_0 = 10^{12} G$ და ვღებულობთ $V_A = 3.76 \cdot 10^8$ სმ/წმ.



ნახ.3 უგანზომილებო \bar{n} , \bar{n}_1 , სიხშირე $\bar{\Omega}$ და რადიალური სიჩქარის \bar{V}_r დამოკიდებულება რადიალურ მანძილზე R -ზე. გადანომრილი ბელტრამის პარამეტრი $a = 10^{-2}$, $R_L = 1.33$, $\Delta R = 10^{-12}$.

6. დასკვნა და სამომავლო გეგმები

ნაშრომში ვაჩვენეთ რომ მაგნიტო-სითხის კავშირის გამოვლენით სამმაგი/ორმაგი ბელტრამის განტოლებებში ძლიერად დამაგნიტებულ გადაგვარებულ e-p პლაზმაში, რომელიც დაიკვირვება ისეთ კომპაქტურ ობიექტებში, როგორცაა მაგალითად ნეიტრონული ვარსკვლავი, მიიღება კატასტროფა - სიმკვრივის მკვეთრ ვარდნას თან ახლავს ზედაპირთან ახლოს გაძლიერებული სწრაფი რადიალური გამოტყორცნილი დინება, რომელსაც შეუძლია წვლილი შეიტანოს კომპაქტური ობიექტის გარშემო ასტროფიზიკური დისკი-ჯეტის სტრუქტურის სწრაფი ჯეტის გამოკვებაში. რელატივისტური გრავიტაციის სწორი ჩართვით მიიღება მნიშვნელოვანი ვარდნა/ამოტყორცნა - საბოლოო რადიალური სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია გრავიტაციის ფუნქციის. ამავე დროს, გრავიტაციული გაფართოებით მიღებული გამოტყორცნილი დინება გლუვია მანამ სანამ მაგნიტო-სითხური კავშირი გადააჭარბებს. კრიტიკულ რადიალურ მანძილზე, სადაც სიმკვრივე DB/TB ეფექტებით განიცდის მკვეთრ ცვლილებას, ამოტყორცნილი დინება ძლიერდება, რის შემდეგაც მიიღევა. სამომავლოდ იგეგმება დისიპაციის ეფექტის, დროზე დამოკიდებულების და ა.შ. ეფექტების შესწავლა.

- სამაგისტრო ნაშრომში წარმოდგენილი კვლევა დაწყებულია თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის „მიზნობრივსამეცნიერო კვლევით პროგრამის“ მიერ დაფინანსებული პროექტის „ასტროფიზიკური თხელი დისკების ჯეტების ფორმირება“ ფარგლებში.
- შედეგების ნაწილი მიღებულია თსუ სტუდენტური სამეცნიერო პროექტის „დისკი-ჯეტის სტრუქტურის ფორმირება ტურბულენტური სიბლანტის, მრავალსითხოვნებისა და რელატივისტური ეფექტების გათვალისწინებით“ დაფინანსებული კვლევის ფარგლებში.
- შედეგების ნაწილი მიღებულია World Federation of Scientists National Scholarship Programme Geneva 2018 კვლევის ფარგლებში.
- შედეგების ნაწილი მიღებულია შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდის გრანტის პროექტის No. FR17_391 კვლევის ფარგლებში.

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] Livio, M. The Formation of Astrophysical Jets”, in Accretion Phenomena and Related Outflows; IAU Colloquium 163 ed. D. T. Wickramasinghe et al (San Francisco: ASP) ASP Conference Series 1997, 121, 845.
- [2] R. D. Blandford and R. L. Znajek, Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes, MNRAS 179, 433 (1977)
- [3] L. Pavan, P. Bordas, G. Pühlhofer, M.D. Filipovic, A. De Horta, O’ Brien, M. Balbo, R. Walter, E. Bozzo, C. Ferrigno, E. Crawford, L. Stella, The long helical jet of the lighthouse nebula, IGR J11014-6103. Astronomy & Astrophysics manuscript no. pavan-aa201322588 c Eso 2014.
- [4] L.Pavan, G. Pühlhofer, P. Bordas, M. Audard, M.Balbo, E. Bozzo, D.Eckert, C. Ferrigno, M.D. Filipovic, M. Verdugo, R. Walter, A closer view of the IGR J11014-6103 outflows. Astronomy & Astrophysics manuscript no. ms_igrj11014-6103_lpavan. November 9, 2015
- [5] S. M. Mahajan and Z. Yoshida, Double Curl Beltrami Flow: Diamagnetic Structures, Phys. Rev. Lett. 81, 4863, (1998)
- [6] Berezhiani, V.I., Shatashvili, N.L., Mahajan, S.M.: Beltrami-Bernoulli equilibria in plasmas with degenerate electrons. Phys. Plasmas 22, 022902 (2015)
- [7] N.L. Shatashvili, S.M. Mahajan, V.I. Berezhiani: Mechanisms for multi-scale structures in dense degenerate astrophysical plasmas. Astrophys Space Sci 361:70 (2016)
- [8] Chinmoy Bhattacharjee, Rupam Das, David J. Stark, S.M. Mahajan, Beltrami state in black-hole accretion disk: A Magnetofluid approach. Phys. Rev. E 92, 063104 (2015).
- [9] A.A. Barnaveli, N.L. Shatashvili, Mechanism for flow generation/acceleration in dense degenerate stellar atmospheres. Astrophys Space Sci 362:164 (2017)
- [10] Berezhiani, V.I., Shatashvili, N.L., Tsintsadze, N.L.: Electromagnetic solitons in degenerate relativistic electron-positron plasma. Phys. Scr. 90(6), 068005 (2015)
- [11] S. M. Mahajan, R. Miklaszewski, K. I. Nikolskaya, and N. L. Shatashvili, *Phys. Plasmas* 8, 1340 (2001).
- [12] S.M Mahajan. Temperature-transformed “minimal coupling”: Magnetofluid unification. *Phys. Rev. Lett.*, 90:035001, (2003)
- [13] Asenjo F A, Mahajan S M and Qadir A, Generating vorticity and magnetic fields in plasmas in general relativity: spacetime curvature drive *Phys. Plasmas* 20 22901 (8) (2013)
- [14] S. Sengupta, General relativistic effects on the induced electric field exterior to pulsars. The Astrophysical Journal, 449:224-230, (1995 August 10)

[15] Thorne K.S., Macdonald D.A., Electrodynamics in curved spacetime: 3+1 formulation. *MNRAS*, 198, 339 (1982)

[16] Lattimer, J.M.: The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* 62, 485 (2012)

A ოპერატორები ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში

ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში A ვექტორის როტორი

$$\nabla \times A = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \begin{vmatrix} \sqrt{g_{rr}}\hat{e}_r & \sqrt{g_{\theta\theta}}\hat{e}_\theta & \sqrt{g_{\phi\phi}}\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \sqrt{g_{rr}}A_r & \sqrt{g_{\theta\theta}}A_\theta & \sqrt{g_{\phi\phi}}A_\phi \end{vmatrix} \quad (\text{A. 1})$$

$$\nabla \times \bar{G}\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \begin{vmatrix} \sqrt{g_{rr}}\hat{e}_r & \sqrt{g_{\theta\theta}}\hat{e}_\theta & \sqrt{g_{\phi\phi}}\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \sqrt{g_{rr}}\bar{G}\bar{V}_r & \sqrt{g_{\theta\theta}}\bar{G}\bar{V}_\theta & \sqrt{g_{\phi\phi}}\bar{G}\bar{V}_\phi \end{vmatrix} \quad (\text{A. 2})$$

$$[\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_r = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{\phi\phi}}\bar{G}\bar{V}_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \sqrt{g_{\theta\theta}}\bar{G}\bar{V}_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A. 3})$$

$$[\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\theta = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}g_{rr}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{rr}}\bar{G}\bar{V}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial \sqrt{g_{\phi\phi}}\bar{G}\bar{V}_\phi}{\partial r} \right] \quad (\text{A. 4})$$

$$[\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}}} \left[\frac{\partial \sqrt{g_{\theta\theta}}\bar{G}\bar{V}_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \sqrt{g_{rr}}\bar{G}\bar{V}_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A. 5})$$

$$\nabla \times \frac{\bar{G}}{\alpha\bar{n}} \nabla \times \bar{G}\bar{V} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \begin{vmatrix} \sqrt{g_{rr}}\hat{e}_r & \sqrt{g_{\theta\theta}}\hat{e}_\theta & \sqrt{g_{\phi\phi}}\hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\sqrt{g_{rr}}\bar{G}}{\alpha\bar{n}} [\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_r & \frac{\sqrt{g_{\theta\theta}}\bar{G}}{\alpha\bar{n}} [\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\theta & \frac{\sqrt{g_{\phi\phi}}\bar{G}}{\alpha\bar{n}} [\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\phi \end{vmatrix} \quad (\text{A. 6})$$

$$[\nabla \times \frac{\bar{G}}{\alpha\bar{n}} \nabla \times \bar{G}\bar{V}]_r = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}}} \left[\frac{\partial \frac{\sqrt{g_{\phi\phi}}\bar{G}}{\alpha\bar{n}} [\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \frac{\sqrt{g_{\theta\theta}}\bar{G}}{\alpha\bar{n}} [\nabla \times \bar{G}\bar{V}]_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A. 7})$$

$$[\nabla \times \frac{\bar{G}}{\alpha \bar{n}} \nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi} g_{rr}}} \left[\frac{\partial \frac{\sqrt{g_{rr} \bar{G}}}{\alpha \bar{n}} [\nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_r}{\partial \phi} - \frac{\partial \frac{\sqrt{g_{\phi\phi} \bar{G}}}{\alpha \bar{n}} [\nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_{\phi}}{\partial r} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$[\nabla \times \frac{\bar{G}}{\alpha \bar{n}} \nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta}}} \left[\frac{\partial \frac{\sqrt{g_{\theta\theta} \bar{G}}}{\alpha \bar{n}} [\nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \frac{\sqrt{g_{rr} \bar{G}}}{\alpha \bar{n}} [\nabla \times \bar{G} \Gamma \bar{V}]_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A.9})$$

ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში \mathbf{A} ვექტორის დივერგენცია

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} A_r}{\partial r} + \frac{\partial \sqrt{g_{rr} g_{\phi\phi}} A_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sqrt{g_{rr} g_{\theta\theta}} A_{\phi}}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.10})$$

შვარცმილდის მეტრიკისთვის მეტრიკის კომპონენტები:

$$g_{tt} = -\alpha^2 = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad g_{rr} = -\alpha^{-2} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.11})$$

B სფერული ფუნქციები და მათი თვისებები

მულტიპოლური გაშლა:

$$\rho'(\mathbf{r}) = \rho'(r, \phi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \rho_{lm}(r) Y_l^m(\phi, \theta) \quad (\text{B.1})$$

მულტიპოლური გაშლებისას გამოყენებულია სფერული ჰარმონიკები Y_l^m , სადაც l და m ინდექსები აღწერენ აქსიალურ და პოლოიდალურ თვისებებს:

$$Y_l^m(\phi, \theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{B.2})$$

პირველი რამდენიმე სფერული ფუნქცია:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad (\text{B. 3})$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta \quad (\text{B. 4})$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (\text{B. 5})$$

$$Y_3^0(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \quad (\text{B. 6})$$

სფერული ფუნქციის ნორმირება:

$$\int Y_l^0(\Omega) d\Omega = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \quad (\text{B. 7})$$

სფერული ფუნქციების რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$\cos \theta Y_l^0(\theta, \phi) = \frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^0(\theta, \phi) + \frac{l}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^0(\theta, \phi) \quad (\text{B. 8})$$

$$\frac{d}{dx} Y_l^0(x) = \frac{l+1}{1-x^2} \left[x Y_l^0(x) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} Y_l^0(x) \right] \quad (\text{B. 9})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Y_l^0(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta &= -\frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \int Y_{l+1}^0(x) dx - \frac{l}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \int Y_{l-1}^0(x) dx = \\ &= -\frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \sqrt{\pi} \delta_{l+1,0} - \frac{l}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \sqrt{\pi} \delta_{l-1,0} \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Y_{l+1}^0(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta &= -\frac{l+2}{\sqrt{(2l+3)(2l+5)}} \int Y_{l+2}^0(x) dx - \frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \int Y_l^0(x) dx = \\ &= -\frac{l+2}{\sqrt{(2l+3)(2l+5)}} \sqrt{\pi} \delta_{l+2,0} - \frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \sqrt{\pi} \delta_{l,0} \end{aligned} \quad (\text{B. 11})$$

$$\int_0^\pi Y_l^0(\theta, \phi) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}} \int Y_{l+1}^0(x) x dx - \frac{l}{\sqrt{(2l-1)(2l+1)}} \int Y_{l-1}^0(x) x dx$$

=

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)\sqrt{(2l+1)(2l+5)}}\sqrt{\pi}\delta_{l+2,0} - \frac{(l+1)^2}{(2l+1)(2l+3)}\sqrt{\pi}\delta_{l,0} - \frac{l^2}{(2l-1)(2l+1)}\sqrt{\pi}\delta_{l,0} \\
&\quad - \frac{l(l-1)}{(2l-1)\sqrt{(2l+1)(2l-3)}}\sqrt{\pi}\delta_{l-2,0} \tag{B.12}
\end{aligned}$$