ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

სამაგისტრო ნაშრომი

ავტორი: ნათია ხატისაშვილი

უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში ინტეგრების თეორიის ზოგიერთი პრობლემა და ფურიეს მწკრივების შეჯამებადობის საკითხი

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი

2019

სარჩევი

1. შესავალი

ნაშრომში განხილული სივრცე პირველად შესწავლილი იყო დანიელის ([4],[5]) მიერ, რომელმაც ეს საკითხი წარმოადგინა აბსტრაქტულ სივრცეში ინტეგრებადობის კვლევასთან დაკავშირებით. შემდგომში ეს საკითხი გამოკვლეულ იქნა ვინერის [20], შტეინჰაუზის ([17],[18]), პელისა და ზიგმუნდის [21], კარლსონისა [3] და იესენის მიერ [8]. ამ თეორიამ გამოყენება ჰპოვა ანალიზურ პრობლემებში და ალბათობის საკითხებში. წინამდებარე ნაშრომის ერთ-ერთი ძირითადი საფუძველი გახდა იესენის სამეცნიერო სტატია [8].

ვთქვათ, $f(x_1, x_2, x_3, ...)$ არის ნამდვილი ან კომპლექსური ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია ნამდვილ ცვლადთა მიმდევრობაზე. ასეთ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული პერიოდით 1,1,1,..., თუ ნებისმიერად აღებული მთელი $n_1, n_2, n_3, ...$ რიცხვებისთვის

$$f(x_1, x_2, x_3, ...) = f(x_1 + n_1, x_2 + n_2, x_3 + n_3, ...).$$

მომავალში მხოლოდ ასეთ ფუნქციებს განვიხილავთ. როდესაც საქმე გვექნება ასეთ პერიოდულ ფუნქციებთან, მოსახერხებელია განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია არა ჩვეულებრივ „ღია“ სივრცეში, არამედ ჩაკეტილ სივრცეში, რომელსაც მივიღებთ კოორდინატთა ღერძის წრეწირით შეცვლით. ამრიგად, სივრცე რომელთანაც საქმე გვექნება, არის ჩაკეტილი სივრცე (ტორი-სივრცე), რომელიც ჩვენ მივიღეთ ნამდვილ რიცხვთა $x_1, x_2, x_3, ...$ მიმდევრობების სივრცის კოორდინატების დაყვანით მოდულით 1. ამ დაყვანილ სივრცეს აღვნიშნავთ Q_ω -ით.

არ იქნება მართებული ისაუბრო სივრცის შესახებ სანამ არ განსაზღვრავ მის წერტილებს შორის თანაფარდობას. ქვემოთ ვისაუბრებთ ამ თანაფარდობის შესახებ, შემოვიღებთ რა ინტერვალების, ზღვრული წერტილების, ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეების ცნებებს და დავამტკიცებთ რა კლასიკური დაფარვის თეორემებს. წინამდებარე შრომის ეს ნაწილი შეიცავს Q_ω სივრცის ტოპოლოგიას, რომელსაც ემყარება მთელი თეორია. ასევე, შესაძლებელია შემოვიღოთ მანძილი Q_ω სივრცის წერტილებს შორის.

სხვა სივრცეები, რომელიც განსხვავებულია Q_ω-გან შეიძლება განხილულ იქნეს ანალოგიური გზით. რამდენიმე ასეთი სივრცე განხილულ იქნა დანიელის ([6]), ფელერის ([12],[13]), ტორნერისა და კოლმოგორვის ([9],[10]) მიერ.

მოცემული ნაშრომის იდეაა განვავითაროთ Q_ω-ზე ინტეგრების თეორია, რომელიც არის ანალოგი n-განზომილებიანი Q_n ტორი-სივრცისა. ეს შესაძლებელია მას შემდეგ, რაც განსაზღვრული იქნება ინტერვალი და ინტერვალის ზომა, გარე და შიგა ზომები, ასევე, ზომადი და ინტეგრებადი ფუნქციები. ამის შემდეგ შესაძლებელი იქნება მათი გამოყენება. შრომაში დამტკიცებულია, რომ ზომასა და ინტეგრალს აქვს ჩვეულებრივი თვისებები. ამ თვისებების მტკიცებისას გამოყენებულია ლებეგის [11], რისისა ([14],[15],[16]) და ვალე-პუსენის დებულებები. ნაშრომის უმნიშვნელოვანესი ნაწილია Q_ω-ზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის ფურიეს მწკრივთა თეორია. ნაშრომში Q_ω-ზე ინტეგრებადი ფუნქციებისათვის ჩვენ განვიხილავთ შემდეგი სახის ფურიეს მწკრივებს:

$$\sum c_{p_1,p_2,\dots,p_n}\, e^{2\pi i(p_1x_1+p_2x_2+\dots+p_nx_n)},$$

სადაც აჯამვა ხდება როგორც p-ების ასევე n-ების მიმართ. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს მწკრივი ცალსახად განსაზღვრავს ფუნქციას. ასევე, დავამტკიცებთ პარსევალის და რისისა ([14],[15],[16]) და ფიშერის თეორემებს ასეთი მწკრივებისათვის.

ბოლოს, ამ საკითხებთან დაკავშირებით განვიხილავთ თ. ახობაძის [22] ზოგიერთ შედეგს.

2. უსასრულოგანზომილებიანი ტორი-სივრცე

დავიწყოთ იმ სივრცის განხილვით, რომელიც შედგება ყველა ნამდვილ რიცხვთა $x_1, x_2, x_3, \dots$ მიმდევრობისგან. ამ სივრცის კოორდინატები დავიყვანოთ მოდულით 1. მივიღებთ ჩაკეტილ სივრცეს, რომელსაც ვუწოდებთ ტორი-სივრცეს და აღვნიშნავთ c_k-თი. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ამ სივრცეში განსაზღვრულ ფუნქციებს. კოორდინატების დაყვანის საშუალებით მოდულით 1 კოორდინატთა ღერძი ამ სივრცეში გახდება წრეწირი, რომელსაც ვუწოდებთ Q_ω სივრცის კოორდინატთა წრეწირს და აღინიშნება სიმბოლოთი $c_1, c_2, c_3, \dots$; ყველას სიგრძე ერთის ტოლია. x_k გამოიყენება ორი განსხვავებული აზრით: ორივე აღნიშნავს, რომ x_k არის კოორდინატთა c_k წრეწირის

წერტილი, ამასთან, x_k განსაზღვრულია მოდულით 1. მოცემული სივრცის წერტილი კოორდინატებით $x_1, x_2, x_3, \ldots$ აღინიშნება ასე

$$x = \left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right).$$

უფრო მოსახერხებელი იქნება, რომ გვქონდეს ჩამოყალიბებული ცნება ნებისმიერად აღებული სასრული ან უსასრულო რაოდენობის $A_1, A_2, A_3, \ldots$ სიმრავლეთა ნამრავლისთვის. ეს ნამრავლი $A = (A_1, A_2, A_3, \ldots)$ განსაზღვრულია, როგორც ყველა $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$-ების სიმრავლე, სადაც x_k ეკუთვნის A_k-ს. ამ გაგებით ტორი-სივრცე Q_ω არის კოორდინატთა $c_1, c_2, c_3, \ldots$ წრეწირების ნამრავლი

$$Q_\omega = (c_1, c_2, \ldots).$$

განხილული სივრცის დიდი მნიშვნელობის გამო განვსაზღვროთ ინტერვალი Q_ω სივრცეში. b -ით აღინიშნება წრეწირის ღია რკალი ან თვითონ წრეწირი. აშკარაა, რომ ინტერვალის აღნიშვნა Q_ω სივრცეში იქნება ნებისმიერ წერტილთა სიმრავლე ნებისმიერ კოორდინატთა c_k წრეწირიდან b_k რკალის არჩევით. განვიხილავთ რა ამ რკალების ნამრავლს, გვექნება წარმოდგენა:

$$I = (b_1, b_2, b_3, \ldots) \tag{2.1}$$

ინტერვალებად ასეთი ნამრავლების განხილვა, როგორც ვნახავთ, არადამაჯერებელია. თეორია დამოკიდებულია ფაქტზე, რომ ინტერვალებად მიიჩნევა (2.1) ფორმის ისეთი სიმრავლეები, რომელთაგან მხოლოდ სასრული რაოდენობა $b_1, b_2, b_3, \ldots$ რკალებისა არის ჩვეულებრივი რკალი, ხოლო დანარჩენი რკალები საკოორდინატო წრეწირებს წარმოადგენს. რკალის სიგრძე ეწოდება შემადგენელი რკალების სიგრძეთა ნამრავლს. თავად სივრცე არის ინტერვალი და მისი სიგრძე ამ აზრით არის 1.

უფრო მოსახერხებელია, რომ Q_ω სივრცე განვიხილოთ, როგორც ნამრავლი n-განზომილებიანი ტორი-სივრცით $Q_n = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n)$ და სასრულგანზომილებიანი ტორი-სივრცით $Q_{n,\omega} = (c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots)$.

შევთანხმდეთ და უკანასკნელი წარმოვადგინოთ $Q_{n,\omega}=(Q_{n,}Q_{n,\omega})$ სახით. თუ $x'=(x_1,x_2,...,x_n)$ და $x''=(x_{n+1},x_{n+2},...)$ არის Q_n და $Q_{n,\omega}$ სივრცის ორი წერტილი, მაშინ Q_ω სივრცის შესაბამის x წერტილს აღვნიშნავთ სიმბოლოთი $x=(x',x'')$. წერტილები x' და x'' არის წერტილები Q_n და $Q_{n,\omega}$ სივრცეებიდან. თუ ჩვენ Q_ω სივრცის სიმრავლის ყველა წერტილს დავაგეგმილებთ Q_n და $Q_{n,\omega}$ სივრცეებზე, მაშინ მივიღებთ თვით ამ სიმრავლის გეგმილს. (2.1) ინტერვალის გეგმილი Q_n და $Q_{n,\omega}$-ზე, შესაბამისად, არის ინტერვალები:

$$I'=(b_1,b_{2,},...,b_n)$$

და

$$I''=(b_{n+1},b_{n+2,},...);$$

ამრიგად, გვაქვს $I=(I',I'')$. თუ n არის საკმარისად დიდი, მაშინ გვაქვს $I''=Q_{n,\omega}$ და $I=(I',Q_{n,\omega})$. Q_ω სივრცეში ნებისმიერად აღებული A სიმრავლისთვის წარმოდგენა $A=(A',A'')$ საზოგადოდ არ იქნება სწორი. თუ ჩვენ გვაქვს $A=(A',Q_{n,\omega})$ ან $A=(Q_n,A'')$, მაშინ A-ს ეწოდება ცილინდრი. პირველ შემთხვევაში მისი "საფუძველი" არის A' სიმრავლე Q_n სივრცეში, ხოლო მეორე შემთხვევაში - არის A'' სიმრავლე $Q_{n,\omega}$ სივრცეში.

თეორია ფუნქციების შესახებ Q_ω სივრცეში განვითარებული იქნება ისე, რომ ის ახლოს იქნება Q_n სივრცეში ანალოგიური თეორიასთან თანაც ისე, რომ ეს თეორია შეიცავდეს შესაბამის თეორიას Q_n სივრცეებისთვის. ცხადია, Q_n-ზე ნებისმიერი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქცია შეიძლება განხილული იყოს როგორც ფუნქცია Q_ω-ზე, რომელიც არ არის დამოკიდებული $x_{n+1},x_{n+2},...$ ცვლადებზე. ყოველ A' სიმრავლეს Q_n სივრცეში შეესაბამება $A=(A',Q_{n,\omega})$ ცილინდრი Q_ω სივრცეში. ფუნქციები, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ $x_1,x_2,...,x_n$ ცვლადებზე ან $x_{n+1},x_{n+2},...$ ცვლადებზე მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ამ თეორიაში.

3. ზღვრული წერტილი. დამფარავი თეორემა

ვიტყვით, რომ $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, ...)$ წერტილების მიმდევრობა Q_ω სივრცეში კრებადია და აქვს ზღვრული წერტილი $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$, თუ $x_k^{(n)} \to x_k$, როცა $n \to \infty$, ნებისმიერი ფიქსირებული k-სთვის. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $x^{(n)} \to x$, როცა $n \to \infty$. ვთქვათ, მიმდევრობა $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, ...$ კრებადა x-კენ და I_x არის x-ის მიდამო-ინტერვალი. აქედან გამომდინარეობს რომ $x^{(n)}$ უნდა იყოს I_x-ში, ყველა საკმარისად დიდი n-სთვის. პირიქითაც სამართლიანია. ვთქვათ, რომ $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, ...$ მიმდევრობას და x წერტილსაც აქვს თვისება, რომ ნებისმიერი I_x ინტერვალისთვის, რომელიც შეიცავს x წერტილს შეიცავს, ასევე, ამ მიმდევრობის ყველა წევრს რაღაც ადგილიდან დაწყებული. ეს მიმდევრობა იქნება კრებადი და ექნება ზღვრული წერტილი x. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა არის სამართლიანი Q_ω სივრცისთვის: Q_ω სივრცის წერტილების ნებისმიერი $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, ...$ მიმდევრობა შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას. ამის მტკიცება შესაძლებელია ჩვეულებრივი გზით (დიაგონალური მეთოდით).

თუ A სიმრავლის წერტილთა ყველა კრებადი მიმდევრობის ზღვრული წერტილი ეკუთვნის A-ს, მაშინ ვამბობთ რომ A არის ჩაკეტილი სიმრავლე. A სიმრავლე ითვლება ღიად, თუ A-ს დამატებითი სიმრავლე არის ჩაკეტილი. ინტერვალი არის ღია სიმრავლე, მაგრამ იგივე არ არის სამართლიანი იმ სიმრავლეებისთვის, რომელთაც აქვს (2.1) სახე, სადაც b_k რკალის უსასრულო რაოდენობა შეიძლება იყოს ჩვეულებრივი რკალი. ჩვენ დავამტკიცებთ უფრო ზოგად დებულებას: წერტილთა A სიმრავლე Q_ω სივრცეში არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყოველი x წერტილისთვის მოიძებნება x-ის შემცველი I_x ინტერვალი A-დან.

ამ თეორემის ერთი ნაწილი ცხადია: თუ A სიმრავლე შეიცავს x-ს და შეიცავს, აგრეთვე, ამ წერტილის I_x მიდამოს, მაშინ A-ს არცერთი x წერტილი არ შეიძლება იყოს დამატებითი $Q_\omega \setminus A$ სიმრავლის ზღვრული წერტილი. ამრიგად, ეს სიმრავლე უნდა იყოს ჩაკეტილი. აქედან გამომდინარე კი - A ღია. საპირისპიროს დასამტკიცებლად ვთქვათ, A არის ღია და $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ არის A-ს წერტილი. განვიხილოთ ნებისმიერი n-სთვის ინტერვალი $I^{(n)} = (b_1, b_2, ..., b_n, c_{n+1} c_{n+2}, ...)$, სადაც b_k, $1 \le k \le n$, არის რკალი c_k-ზე, რომლის

შუაწერტილია x_k და რომლის სიგრძეა $\frac{1}{n}$. ცხადია, რომ $I^{(n)}$ უნდა ეკუთვნოდეს A-ს, ყოველი საკმარისად დიდი n-სთვის. თუ ეს ასე არ არის, მაშინ ნებისმიერი n-სთვის $Q_\omega \setminus \mathrm{A}$-ის $x^{(n)}$ წერტილითა მიმდევრობა, რომელიც $I^{(n)}$ ინტერვალშია კრებადია x-კენ, რაც ნიშნავს, რომ $Q_\omega \setminus \mathrm{A}$ არ იქნება ჩაკეტილი.

თუ დავამატებთ ნებისმიერად აღებულ A სიმრავლეს ყველა გარე ზღვრულ წერტილს, მივიღებთ A-ს ჩაკეტვას $\overline{A}$, რომელიც არის ყველაზე „პატარა“ ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს A-ს. თუ $A=(e_1,e_2,e_3,\ldots)$, სადაც e_k არის ნებისმიერად აღებული სიმრავლე c_k-ზე, მაშინ გვაქვს $\overline{A}=(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3},\ldots)$. თუ I არის ინტერვალი ჩვენ $\overline{I}$-ს ვუწოდებთ შესაბამის ჩაკეტილ ინტერვალს.

საბოლოოდ, მივიღეთ ორი კლასიკური დამფარავი თეორემა:

1. ლინდელოფის დამფარავი თეორემა: თუ A სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისთვის არსებობს Q_ω სივრცეში x-ის დამფარავი I_x ინტერვალი, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ სასრული ან თვლადი რაოდენობა I_x-ის, რომლებიც ფარავს A სიმრავლეს.

დამტკიცებისათვის რაციონალურ წერტილად მივიჩნევთ წერტილს, რომლის ყველა კოორდინატი რაციონალურია, ხოლო რაციონალური რკალად მივიჩნევთ რკალს რომლის ყველა საკოორდინატო რკალების ბოლო წერტილები რაციონალურია (სრულ რკალებს განვიხილავთ როგორც რაციონალურ ინტერვალებს). I ინტერვალს Q_ω სივრცეში ეწოდება რაციონალური თუ მისი განმსაზღვრელი რკალები რაციონალურია. აშკარაა რომ ამ სივრცეში არის თვლადი რაოდენობა რაციონალური ინტერვალები. x წერტილის ნებისმიერი ინტერვალი შეიცავს x-ის შემცველ რაციონალურ ინტერვალს. ეს ამტკიცებს თეორემას.

2. ბორელის დამფარავი თეორემა: თუ განხილული A სიმრავლე არის ჩაკეტილი, მაშინ ინტერვალების სასრული რაოდენობა იქნება ყოველთვის საკმარისი, რომ დაფაროს A.

ყველაზე მარტივი გზა ამ თეორემის დამტკიცების არის ის, რომ გამოვიყენოთ ლინდელოფის თეორემა. ვთქვათ, A არის დაფარული $I^{(1)},I^{(2)},I^{(3)},\ldots$ ინტერვალების მიმდევრობით, აღინიშნება $A^{(n)}$-ით, რომელიც არის A-ს ნაწილი და რომელიც

მდებარეობს პირველი n ინტერვალის $I^{(1)}, I^{(2)}, ..., I^{(n)}$ გარეთ; აშკარაა, რომ $A^{(n)}$ ჩაკეტილია. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $A^{(n)}$ ხდება ნულის ტოლი ყველა საკმარისად დიდი n -სთვის. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად, ჩაკეტილი $A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset A^{(3)} \supset ...$ სიმრავლეების მიმდევრობას (არცერთი მათგანი არ ხდება ნულის ტოლი) ექნება საერთო წერტილი და ასეთი წერტილი ჩვენს შემთხვევაში არ არსებობს.

რა თქმა უნდა, შეგვიძლია განვაგრძოთ Q_ω სივრცის შესწავლა. ამჯერად დავამატებთ მხოლოდ შემდეგ თეორემას: A'-ით აღვნიშნოთ ნებისმიერად აღებული სიმრავლე Q_n-ში და ვთქვათ, Q_ω სივრცეში $A = (A', Q_{n,\omega})$ სიმრავლე მოთავსებულია Q_ω-ს ღია O სიმრავლეში. Q_n-ში არსებობს ღია სიმრავლე U', რომელიც შეიცავს A'-ს და ისეთია, რომ $U = (U', Q_{n,\omega})$ მოთავსებულია O-ში. ეს უკანასკნელი შეიძლება ასე დამტკიცდეს: A'-ის ფიქსირებული x' რიცხვისთვის Q_ω-ში განვიხილოთ $(x', Q_{n,\omega})$ სიმრავლე, რომელიც შედის O-ში და ეს ამტკიცებს თეორემას. ასევე გვაქვს შესაბამისი დებულება. თუ (Q_n, A'') სახის სიმრავლე, სადაც A'' არის სიმრავლე $Q_{n,\omega}$-ში, შედის Q_ω სივრცის ღია O-ში სიმრავლეში, მაშინ A'' შედის ღია U'' სიმრავლეში, ისეთში, რომ $U = (Q_n, U'')$ მდებარეობს O-.

4. უწყვეტი და ნახევრად უწყვეტი ფუნქციები

Q_ω სივრცეში განსაზღვრულ $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, ...)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი Q_ω-ში, თუ $f(x^{(n)}) \to f(x)$, როცა $x^{(n)} \to x$. უფრო მარტივად რომ ვთქვათ, ფუნქცია $f(x)$ არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი x-სთვის Q_ω სივრცეში და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ სთვის, არსებობს x-ის მიდამო-ინტერვალი I_x, ისეთი რომ უტოლობა

$$| f(x) - f(x') | < \varepsilon$$

სამართლიანია ყველა x' რიცხვისთვის I_x ინტერვალში. თუ ჩვენ ავიღებთ ε-ს, დავაფიქსირებთ და ცვლად x-ს, მაშინ ბორელის დამფარავი თეორემის გამოყენებით დავასკვნით, რომ ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია იქნება შემოსაზღვრული Q_ω-ში. ნამდვილი $f(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისთვის $f(x) \geq a$ და $f(x) \leq a$ სიმრავლეები არის ჩაკეტილი. ასეთი ფუნქცია მიაღწევს ორივეს, მის ზედა და მის ქვედა საზღვარს.

ჩვენ გვაქვს კიდევ ერთი თვისება უწყვეტი ფუნქციების შესახებ, რომელიც გამომდინარეობს ბორელის დამფარავი თეორემიდან. თუ $f(x)=f(x_1,x_2,x_3,...)$ არის უწყვეტი Q_ω-ში, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$-სთვის არსებობს n და $\delta>0$ ისეთი, რომ უტოლობა

$$|f(x_1,x_2,x_3,...)-f(x_1',x_2',x_3',...)|<\varepsilon$$

სამართლიანია, როდესაც $1\le k\le n$-სთვის და სრულდება $|x_k-x_k'|<\delta$ უტოლობა. ეს თეორემა გვიჩვენებს რომ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია Q_ω-ში შეიძლება იყოს მიახლოებული უწყვეტ ფუნქციებით, სადაც თითოეული დამოკიდებულია მხოლოდ სასრულ რაოდენობა ცვლადებზე.

Q_ω-ში განსაზღვრულ ნამდვილ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ნახევრად უწყვეტი ზემოდან Q_ω-ში, თუ $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x^{(n)})\le f(x)$, როცა $x^{(n)}\to x$. ფუნქცია არის ნახევრად უწყვეტი ზემოდან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისთვის $f(x)\ge a$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. $f(x)$ ფუნქცია არის ნახევრად უწყვეტი ქვემოდან, თუ $-f(x)$ არის ნახევრად უწყვეტი ზემოდან.

5. ლებეგის ზომა

ზომის თეორიის აგების გზა Q_ω-ში ახლა უკვე საკმაოდ ცხადია. ჩვენ მხოლოდ გვჭირდება, რომ ნებისმიერ ღია I ინტერვალს (ზემოთ განხილული აზრით) შევუსაბამოთ მისი კიდე-სიგრძეთა ზომათა ნამრავლი. ამის შემდეგ მივიღებთ სიმრავლის ლებეგის ზომის განსაზღვრებას. ეს უკანასკნელი მდგომარეობს შემდეგში:

ვთქვათ, A არის ნებისმიერი სიმრავლე Q_ω-ში და განვიხილოთ A-ს ყველა დაფარვა თვლადი რაოდენობა I ინტერვალებით. ყოველი ასეთი დაფარვისთვის განვსაზღვროთ დამფარავი ინტერვალების ზომათა ჯამი. რადგან Q_ω თვითონაც დამფარავი ინტერვალია, ამიტომ მიღებული რიცხვთა სიმრავლე შეიცავს რიცხვს 1. ამ რიცხვთა სიმრავლის m_eA ქვედა საზღვარს ვუწოდებთ A სიმრავლის ლებეგის გარე ზომას. A სიმრავლის ლებეგის m_iA შიგა ზომა არის განსაზღვრული შემდეგი თანაფარდობით $m_iA=1-m_e(Q_\omega-A)$.

გვაქვს $0 \le m_e A \le 1$ და აქედან გამომდინარე $0 \le m_i A \le 1$. უფრო მეტიც $m_i A \le m_e A$ ან $m_e A + m_e(Q_\omega - A) \ge 1$. A-ისა და $Q_\omega \setminus A$-ის ორივე დაფარვა ერთად ფარავს Q_ω-ს. ბორელის დაფარვის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ განხილული სასრული რაოდენობა ინტერვალები დაფარავს Q_ω-ს. ეს ინტერვალები ზოგიერთი ფიქსირებული n-სთვის შეიძლება იქნას დაწერილი შემდეგი ფორმით: $I = (I', Q_{n,\omega})$, სადაც I' აღნიშნავს ინტერვალს Q_n-ში. მისი ზომა იგივეა რაც I-ის. I' ინტერვალი ფარავს Q_n-ს, მათი ზომის ჯამი უნდა იყოს $\geqq 1$ და თეორემა დამტკიცებულია.

თუ შიგა ზომა იგივეა რაც გარე ზომა, A სიმრავლეს ეწოდება ლებეგის აზრით ზომადი უსასრულო განზომილებიანი ზომით

$$mA = m_e A = m_i A.$$

დასტურდება, რომ ინტერვალები არის ზომადი სიმრავლე და მათი ზომა იგივეა, რაც უკვე განვსაზღვრეთ. ეს შეიძლება პირდაპირი გზითაც ადვილად დავამტკიცოთ, თუმცა ამისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგადი მოსაზრებაც. შევნიშნოთ, რომ თუ A' აღნიშნავს ნებისმიერ სიმრავლეს Q_n-ში, მაშინ $A = (A', Q_{n,\omega})$ ცილინდრის გარე და შიგა ზომა იქნება იგივე, რაც გარე და შიგა ზომა A'-ის, n განზომილებიან სივრცეში. კერძოდ, ორი სიმრავლე A და A' იქნება ერთობლივად ზომადი იგივე ზომით. დამტკიცებაში პირველი რასაც ვგულისხმობთ არის ის, რომ A' არის ზომადი. თანაფარდობა $m_e A + m_e(Q_\omega - A) \ge 1$ კავშირშია შემდეგ თანაფარდობებთან:

$$mA' + m(Q_n - A') = 1, \quad mA' \ge m_e A, \quad m(Q_n - A') \ge m_e(Q_\omega - A).$$

გვექნება

$$m_e A = mA', \quad m_e(Q_\omega - A) = m(Q_n - A').$$

ამრიგად, $m_i A = m_e A = mA'$. ვთქვათ, A' არ არის ზომადი; ეს არსებითად საკმარისია, რომ დავამტკიცოთ $m_e A = m_e A'$ და აქედან გამომდინარე $m_e A \leqq m_e A'$-თვის საკმარისია, რომ დავამტკიცოთ $m_e A + \varepsilon > m_e A'$ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის. განვიხილოთ A-ს დამფარავი თვლადი რაოდენობა I ინტერვალები, ისეთი რომ მათი ზომების ჯამი იყოს ნაკლები $(m_e A + \varepsilon) -$ზე. ამ ინტერვალების ღია სიმრავლეები აღვნიშნოთ O-თი. მაშინ ცხადია,

გვაქვს $m_e A+\varepsilon > m_e O$. დავამტკიცოთ, რომ Q_n-ში არსებობს U' ღია სიმრავლე, რომელიც შეიცავს A'-ს და $U=(U', Q_{n,\omega})$ შედის O-ში. თეორემის ეს დამტკიცება წინა შემთხვევაში უკვე განვიხილეთ

$$m_e A+\varepsilon > m_e O \geqq mU = mU' \geqq m_e A'.$$

ეს თეორემა მოვიტანეთ იმის საჩვენებლად, რომ n-განზომილებიანი ზომა არის კერძო შემთხვევა „უსასრულო განზომილებიანი ზომის“. აქედან გამომდინარეობს, რომ Q_ω-ში ნებისმიერი ჩაკეტილი $\overline{I}$ ინტერვალი არის აგრეთვე ზომადი და მისი ზომა იგივეა რაც კიდე-სიგრძის ნამრავლის ზომა.

ზუსტად იგივე გზა შეგვიძლია გამოვიყენოთ დამტკიცებისთვის, თუ A'' აღნიშნავს ნებისმიერად აღებულ სიმრავლეს $Q_{n,\omega}$-ში და $A=(Q_n, A'')$ არის შესაბამისი ცილინდრი Q_ω-ში, მაშინ ორ სიმრავლეს A''-ს და A-ს აქვს იგივე გარე და შიგა ზომა. დამტკიცება დამოკიდებულია თეორემაზე, რომლის თანახმადაც ნებისმიერი ღია უსასრულო განზომილებიანი სიმრვლე არის ზომადი. ასევე შევნიშნოთ შემდეგი თეორემა, რომლის დამტკიცებაც ძალიან ადვილია; თუ A' და A'' ნებსმიერად აღებული ზომადი სიმრავლეებია შესაბამისად Q_n-ში და $Q_{n,\omega}$-ში, მაშინ $A=(A', A'')$ სიმრავლე Q_n-ში, არის ასევე ზომადი და გვექნება $mA = mA' \cdot mA''$.

განსაკუთრებულ როლს თამაშობს ნულ-სიმრავლეები Q_ω-ში, რომლებიც არის ზომადი 0 ზომით. თვლადი რაოდენობა ნულოვანი სიმრავლის ჯამი არის ისევ ნულოვანი სიმრავლე. თუ Q_ω^* არის Q_ω-ის ქვესიმრავლე, რომელიც Q_ω-გან განსხვავდება მხოლოდ ნულოვანი სიმრავლით და თუ A^* აღნიშნავს Q_ω^*-სა და ნებისმიერად აღებული A სიმრავლის საერთო ნაწილს Q_ω-ში, მაშინ ადვილი სანახავია, რომ $m_e A = m_e A^*$ და $m_i A = m_i A^*$. ნულოვანი სიმრავლის მაგალითისთვის ავიღოთ ყველა იმ წერტილის სიმრავლე Q_ω-ში, რომლის ყველა კოორდინატი არ არის ირაციონალური.

6. ბადეების აგება

ზემოთ განხილულის შემდეგ გასაოცარი არ იქნება, რომ წარმოდგენილ ზომას ჰქონდეს ყველა ის თვისება, რომელიც აქვს n-განზომილებიან ზომას Q_n სივრცეში. ეს შეიძლება დამტკიცდეს ჩვეულებრივი გზით, მაგრამ უფრო ადვილი იქნება გამოვიყენოთ

გადატანის პრინციპი, რომელიც მოგვცემს შედეგს არგუმენტების გამეორების გარეშე. ეს გადატანის პრინციპი მთლიანად დამოკიდებულია ბადის შინაარსზე. ნამდვილი ფუნქციების თეორიაში ასეთი მიდგომა პირველად წარმოდგენილია ვალე პუსენის მიერ [19]. სასრული რაოდენობის ცვლადების მქონე ფუნქციების შემთხვევაში ამ ცნებას არ აქვს დიდი მნიშვნელობა. მაგრამ ის გვაძლევს თეორემის დამტკიცების უმარტივეს გზას უსასრულოგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში. Q_ω სივრცის თეორიაში ბადის გამოყენება არის თითქმის აუცილებელი გზა ღრმა შედეგების მისაღებად.

ჩვენ ვისაუბრებთ c წრეწირის დაყოფაზე b რკალებად, როდესაც c-დან ამოვიღებთ სასრულ რაოდენობა წერტილებს. იმ შემთხვევაში, როცა არაა ამოღებული არც ერთი წერტილი ან არის ამოღებული მხოლოდ ერთი, ასევე, განხილული იქნება როგორც დაყოფა. როცა რკალს აღვნიშნავთ b-ით, მაშინ ვგულისხმობთ, რომ ის არის ღია. ჩაკეტილი რკალის განხილვისას მას აღვნიშნავთ $\bar{b}$-ით. განვიხილოთ პირველი n საკოორდინატო c_k წრეწირი, რომლებიც შეადგენს Q_n ტორი-სივრცეს და განვიხილოთ ყოველი მათგანის დაყოფა b_k რკალებად. მაშინ მივიღებთ Q_n-ის D' ინტერვალებად დაყოფას, რომელსაც აღვნიშნავთ I'-ით:

$$I' = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

სადაც ყოველი b_k რკალი არის განხილული c_k-ს დაყოფა. ჩვენ მივიღებთ c წრეწირის ქვედაყოფას, c-სთვის უფრო მეტი წერტილის ამოღებით. შესაბამისად, Q_n-ის ქვედაყოფა არის მიღებული კოორდინატთა c_k წრეწირის ქვედაყოფით ან სულ ცოტა ზოგიერთი მათგანის დაყოფით. განვსაზღვროთ ბადე Q_n-ში, როგორც $D'_1, D'_2, D'_3, ...$ ქვედაყოფების მიმდევრობა, სადაც D'_{m+1} არის ყოველთვის D'_m-ის ქვედაყოფა, ამასთან, ფუნდამენტური თვისება სრულდება: D'_m-ში ყველა ინტერვალის კიდე-სიგრძის მაქსიმუმი მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $m \to \infty$.

განსაზღვრება ადვილად განზოგადდება Q_ω სივრცის შემთხვევაში. იმისათვის, რომ მივიღოთ Q_ω სივრცის D დაყოფა, ავიღოთ ყოველი c_k კოორდინატთა წრეწირის დაყოფა b_k რკალებად. მაგრამ მხოლოდ სასრული რაოდენობა დანაყოფები არის რეალური

დანაყოფები წერტილების ამოღებით წრეწირის დანარჩენი ნაწილიდან. შემდეგ კვლავ მივიღებთ შემდეგი სახის ინტერვალებს:

$$I = (b_1, b_2, b_2, \ldots).$$

ამასთან, ჩვენი განსაზღვრების შესაბამისად, ეს I სიმრავლე სინამდვილეში არის ინტერვალები Q_ω-ში. უკანასკნელი გამომდინარეობს იქიდან, რომ ერთდროულად ნებისმიერი Q_ω-ის D დაყოფა შეიძლება განხილულ იყოს როგორც Q_n სივრცის დაყოფა, სადაც n არის საკმარისად დიდი. ამ აზრით D დაყოფის ყველა I ინტერვალი წარმოდგინდება ფორმით $I = (I', Q_{n,\omega})$, სადაც I' ინტერვალი არის Q_n-ის დაყოფა. განვიხილოთ დაყოფათა $D_1, D_2, D_3, \ldots$ მიმდევრობა, სადაც D_{n+1} არის ყოველთვის Q_n-ის დაყოფა. ვიტყვით, რომ ეს მიმდევრობა არის ბადე Q_ω-ში, თუ ნებისმიერი ფიქსირებული *k*-სთვის c_k-ს დაყოფის რკალის მაქსიმალური სიგრძე, რომელიც შესაბამისია D_n-ის, მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $n \to \infty$. Q_ω-ში ბადის ამ განსაზღვრებით, ფუნდამენტური თვისება არის, რომ თუ $\overline{I_1} \supseteq \overline{I_2} \supseteq \overline{I_3} \supseteq \ldots$ აღნიშნავს ნებისმიერი ჩაკეტილი ინტერვალების მიმდევრობას ისეთს, რომ I_n ნებისმიერი n-სთვის ეკუთვნის D_n-ს. მაშინ ამ ინტერვალებს ექნებათ ზუსტად ერთი საერთო წერტილი. ცხადია, არსებობს ბადე Q_ω-ში. ყველა იმ წერტილების სიმრავლე ბადეში, რომლებიც მდებარეობს ზოგიერთი ინტერვალის საზღვარზე არის ნულოვანი სიმრავლე.

7. გადატანის პრინციპი

ბადის აგების საშუალებით ახლა უკვე მარტივია უკვე ნახსენები გადატანის პრინციპის დამტკიცება. ვთქვათ, Q და q არის ორი ტორი-სივრცე. განვიხილოთ: არ არის აუცილებელი, რომ ისინი იყოს უსასრულო განზომილების. მაგალითისთვის ვთქვათ, რომ Q არის Q_ω და q წრეწირი სიგრძით 1. დავამტკიცოთ, რომ არსებობს Q-ის ასახვა q-ზე, რომელიც ითვალისწინებს ზომას შემდეგი ზუსტი აზრით:

არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა Q-ს წერტილებსა (გარდა Q-ს რაღაც 0 სიმრავლესა) და q-ს წერტილებს შორის (გარდა q-ს რაღაც 0 სიმრავლესა) თვისებით, რომ Q-ში და q-ში შესაბამის სიმრავლეებს აქვთ ერთი და იგივე გარე და შიგა ზომა.

ზემოთ განხილული ასეთი ასახვის არსებობა განსაკუთრებულ შემთხვევაში იქნებოდა საკმარისი.

განვიხილავთ დაყოფების $D_1, D_2, D_3, \ldots$ მიმდევრობას, რომლიც არის ბადე Q-ში და - დაყოფების $d_1, d_2, d_3, \ldots$ მიმდევრობას, რომლიც არის ბადე q -ში. D_n-ის ინტერვალებს აღვნიშნავთ I_n -ით, ხოლო d_n-ის ინტერვალებს - i_n -ით. ორი შესაბამისი ბადე Q-ში და q -ში გაიგება შემდეგი აზრით: ნებისმიერი n -თვის არსებობს ურთიერცალსახა თანადობა D_n-ის I_n ინტერვალებსა და d_n-ის i_n ინტერვალებს შორის: შესაბამის I_n და i_n ინტერვალებს ერთი და იგივე ზომა აქვს; ამასთან, თუ I_{n+1} ინტერვალს, რომელიც შედის I_n ინტერვალში, ყოველთვის შეესაბამება i_{n+1} ინტერვალი, რომელიც შედის შესაბამის i_n ინტერვალში. არსებითია, რომ არსებობს შესაბამისი ბადე Q-ში და q -ში.

განვიხილოთ ჩაკეტილი ინტერვალების ნებისმიერი მიმდევრობა Q-ში

$$\overline{I_1} \supseteq \overline{I_2} \supseteq \overline{I_3} \supseteq \ldots \quad . \tag{7.1}$$

ამ მიმდევრობის თითოეული წევრი არის D_n-ის დაყოფიდან. ეს მიმდევრობა ცალსახად განსაზღვრავს Q-ს წერტილს, ვთქვათ, x -ს, მაგრამ არის Q-ის წერტილი, შეიძლება განისაზღვროს მეტით, ვიდრე ერთი (7.1) მიმდევრობაა. ესენია ის x წერტილები, რომლებიც მდებარეობს ზოგიერთი I_n ინტერვალის საზღვარზე. ნებისმიერი (7.1) მიმდევრობის შესაბამისი ორი ბადისთვის არსებობს ჩაკეტილი ინტერვალების მიმდევრობა q -ში:

$$\overline{i_1} \supseteq \overline{i_2} \supseteq \overline{i_3} \supseteq \ldots , \tag{7.2}$$

რომელიც განსაზღვრავს გარკვეულ t წერტილს q-ში. ამრიგად, თუ ავიღებთ Q-ს და q -ს ორ x და t წერტილს და თუ ისინი განსაზღვრულია შესაბამისი (7.1) და (7.2) მიმდევრობებით, მივიღებთ Q-ს ასახვას q -ზე. ეს ასახვა არ არის ურთიერთცალსახა ასახვა გარდა ტრივიალური შემთხვევებისა, რომლის შესაძლებლობა ნაჩვენებია სურათი 1-ზე, მაგრამ ახლა ვაჩვენებთ, რომ თუ განვიხილავთ ასახვას შესაბამისად x და t წერტილთა წყვილებისთვის. ყოველს, რომელსაც აქვს მხოლოდ 1 შესაბამისი წერტილი,

გამორჩეული სიმრავლე არის ნულოვანი სიმრავლე და ასახვას აქვს სასურველი თვისებები. დამტკიცება ადვილია. მაგრამ ის მოითხოვს გარკვეულ ყურადღებას და ჩვენ დამტკიცებისას, რა თქმა უნდა, შეიძლება მხოლოდ რამდენიმე თვისება გამოვიყენოთ, რომელიც უკვე ჩამოვაყალიბეთ.

მოსახერხებელია გამოვტოვოთ გამონაკლისი სიმრავლე და პირველად განვიხილოთ ასახვა, როგორც განისაზღვრება შესაბამის (7.1) და (7.2) მიმდევრობებს შორის. ნებისმიერი S სიმრავლისთვის Q-ში შეიძლება განვიხილოთ q -ის ყველა წერტილის სიმრავლე s, რომელიც შეესაბამება S-ის ზოგიერთ წერტილს.

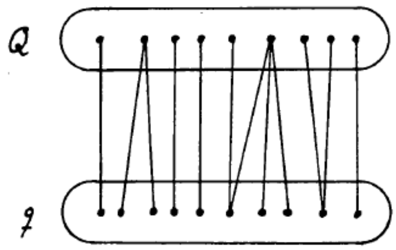

Fig. 1.

ახლა ძალიან ადვილად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ $m_e s \le m_e S$. განვიხილოთ მოცემული $\varepsilon > 0$ თვლადი რაოდენობა I ინტერვალები, რომელიც ფარავს S-ს, ინტერვალების ზომის ჯამი $< m_e S + \varepsilon$. პირველად ავიღოთ D_1 -ის I_1 ჩაკეტილი ინტერვალები, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთ ასეთ დამფარავ I ინტერვალს, მაშინ ყველა D_2-ის ჩაკეტილი $\overline{I_2}$ ინტერვალები, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთ I ინტერვალს, რომელიც არ შედის I_n ინტერვალში და რომელიც უკვე ავარჩიეთ, ეს პროცესი გავაგრძელოთ ასე. ამ გზით მიღებული ყველა ჩაკეტილი I_n ინტერვალის ზომის ჯამი ცხადია, რომ $< m_e S + \varepsilon$. აგრეთვე ყოველი (7.1) მიმდევრობისათვის, რომელიც განსაზღვრავს S-ის x წერტილს. მიმდევრობის პირველი ინტერვალი $\overline{I_n}$, რომელიც ეკუთვნის ერთ-ერთ ინტერვალ I-ის არის არჩეულ $\dot{I}_n$ ინტერვალებს შორის. განვიხილოთ სიმრავლე q-ში, შედგენილი შესაბამისი $\overline{i_n}$ ინტერვალებით, ეს სიმრავლე უნდა შეიცავდეს s-ს. ნებისმიერი $\overline{i_n}$ ინტერვალი შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული ღია ინტერვალებში, რომლის ზომა არის მხოლოდ ოდნავ მეტი. ამრიგად, მივიღეთ $m_e s < m_e S + \varepsilon$ და რადგან

ε იყო ნებისმიერად აღებული $m_e s \leqq m_e S + \varepsilon$. რა თქმა უნდა გვაქვს შესაბამისი შედეგი, რომ თუ r არის სიმრავლე q-ში და R სიმრავლე ყველა წერტილისა Q-ში, რომელიც შეესაბამება r -ის წერტილებს, მაშინ $m_e R \leq m_e r.$

პირველ რიგში განვიხილოთ ყველა წერტილის S_1 სიმრავლე Q-ში. s_1-ით აღინიშნება ყველა შესაბამისი წერტილის სიმრავლე q-ში. S_1 სიმრავლე ცნობილია როგორც ნულოვანი სიმრავლე. მაშინ $m_e s_1 \leqq m_e S_1$, ვხედავთ, რომ s_1 უნდა იყოს აგრეთვე ნულოვანი სიმრავლე. მსგავსად თუ r_1 აღნიშნავს წერტილთა სიმრავლეს q-ში. მეტი ვიდრე ერთი შესაბამისი წერტილი Q-ში და თუ R_1 არის შესაბამისი სიმრავლე Q-ში გვაქვს r_1 და აქედან გამომდინარე R_1 ნულოვანი სიმრავლე. განვიხილოთ Q^* სიმრავლე მიღებული Q-გან ორი ნულოვანი S_1 და R_1 სიმრავლის ამოღებით q^* სიმრავლე მიღებული q-გან ორი s_1 და r_1 სიმრავლის ამოღებით. მაშინ Q^* და q^* ფორმირდება ყველა x და t წერტილთა წყვილების მიერ ყოველ მათგანს აქვს სხვა წერტილი, როგორც მისი შესაბამისი წერტილი. Q^* და q^* განსხვავდება Q და q-გან ნულოვანი სიმრავლით და ერთ-ერთი გამოყენება Q^*-ის q^*-ზე ინარჩუნებს გარე და შიგა ზომებს. ცხადია, თუ S და s შეესაბამება სიმრავლეს Q^* და q^*-ში, გვაქვს ორივე $m_e s \leqq m_e S$ და $m_e S \leqq m_e s$ და აქედან გამომდინარე $m_e S = m_e s$. შესაბამისი შედეგია შიგა ზომისთვის, რომელიც გამომდინარეობს შესაბამისად დამატებითი სიმრავლის Q^* და q^* გათვალისწინებით. შენიშვნისათვის ნულოვანი სიმრავლის ამოღება არ შეცვლის გარე და შიგა ზომებს.

ამგვარად, თეორემა დამტკიცებულია. ზემოთ აღნიშნული შენიშვნა ნულოვან სიმრავლეზე და გადატანის პრინციპი ორივე ერთად ამტკიცებს, რომ ზომა Q_ω-ში აქვს ყველა ზომის თვისებას წრეწირზე. ხაზს ვუსვამთ ძირითად თეორემას: თუ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ აღნიშნავს ზომადი სიმრავლეების სასრული ან თვლადი რაოდენობის მიმდევრობას Q_ω-ში, მაშინ საერთო ნაწილი და ჯამი ამ სიმრავლეების არის კვლავ ზომადი. თუ არ აქვს ორი საერთო წერტილი ამ სიმრავლეებს, მაშინ გვაქვს შემდეგი

$$m(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots) = mA_1 + mA_2 + mA_3 + \ldots.$$

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ღია სიმრავლე Q_ω-ში უნდა იყოს ზომადი. ცხადია, თუ ავირჩევთ ყოველი x წერტილისთვის A-დან x-ის მიდამო I_x ინტერვალს, რომელიც შედის A-ში. ეს გამომდინარეობს ლინდელოფის თეორემიდან, რომ A არის ჯამი სასრული ან თვლადი რაოდენობა ინტერვალების. აქედან გამომდინარეობს, რომ აგრეთვე ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე, როგორც ღია სიმრავლის დამატებითი სიმრავლე უნდა იყოს ზომადი.

8. ჟორდანის ზომა

ზოგად თეორიაში ვიყენებთ სასრულ განზომილებიან ლებეგის ზომას. თუმცა, შესაბამისი ჟორდანის ზომა თამაშობს განსაკუთრებულ როლს გამოყენებებში.

A-ით აღვნიშნოთ ნებისმიერად აღებული სიმრავლე Q_ω-ში. A-ს ყველა დაფარვას შევუსაბამოთ I ინტერვალების სასრული რაოდენობა და განვსაზღვროთ ყოველი ასეთი დაფარვისთვის ყველა დამფარავი ინტერვალის ჯამი. განვსაზღვროთ ჟორდანის გარე ზომა A სიმრავლით, რომელიც არის ქვედა ზღვარი $\mu_e A$-სი. ჟორდანის შიგა ზომა არის განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით $\mu_i A = 1 - \mu_e(Q_\omega - A)$. აშკარაა, რომ გვაქვს $0 \leqq \mu_e A \leqq 1$ და აქედან გამომდინარე აგრეთვე $0 \leq \mu_i A \leq 1$. თანაფარდობა $\mu_i A \leq \mu_e A$ ჟორდანის ზომისთვის ელემენტარულია.

თუ ჟორდანის შიგა ზომა გარე ზომის ტოლია, ვიტყვით, რომ A სიმრავლე არის ზომადი ჟორდანის აზრით უსასრულო განზომილებიან ჟორდანის ზომასთან ერთად

$$\mu A = \mu_i A = \mu_e A.$$

ჟორდანის ზომის თვისებები ზუსტად ისეთივეა, როგორც n განზომილებიანის შემთხვევაში. ვთქვათ, A არის ნებისმიერად აღებული სიმრავლე Q_ω-ში და ვთქვათ, $\overline{A}$ აღნიშნავს A-ს ჩაკეტვას ზემოთ განსაზღვრული აზრით. რადგან A არის ჩაკეტილი ის არის ლებეგის აზრით ზომადი და ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ

$$\mu_e A = m\overline{A}.$$

$\mu_e A \leqq m\overline{A}$ გამომდინარეობს ბორელის დაფარვის თეორემიდან. ცხადია, თუ გვაქვს A-ს დაფარვა თვლადი რაოდენობა I ინტერვალების სიმრავლით, მაშინ I ინტერვალების სასრული რაოდენობა დაფარავს A-ს. სხვა მხრივ, თუ თუ A არის დაფარული სასრული რაოდენობა I ინტერვალებით, მაშინ შესაბამისი ჩაკეტილი $\overline{I}$ ინტერვალები დაფარავს $\overline{A}$-ს, ამრიგად, $\mu_e A \geqq mA$ და ორი უტოლობა ერთად შესაბამისად მოგვცემს შედეგს. სიმრავლეთა კომპლეტაციის განხილვით მივიღებთ შესაბამის შედეგს ჟორდანის შიგა ზომისთვის

$$\mu_i A = m\underline{A},$$

სადაც $\underline{A} = Q_\omega - (\overline{Q_\omega - A})$ აღნიშნავს A-ს ღია ბირთვს. ორი დამოკიდებულება ერთად მიგვანიშნებს, რომ A სიმრავლე არის ზომადი ჟორდანის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჩაკეტილი სიმრავლე $A \setminus A$, რომელიც ჩვენ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, როგორც A-ს ზღვარი, რომელსაც აქვს ლებეგის ზომა და ჟორდანის ზომა არის ნული. შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ ჯამი საერთო ნაწილის სასრული რაოდენობა ზომადი სიმრავლეებისა ჟორდანის აზრით არის კვლავ ზომადი.

უსასრულო განზომილებიანი ჟორდანის ზომა არის მეტად ახლოს n განზომილებიანთან, ვიდრე თავდაპირველად ვივარაუდეთ. A-თი აღვნიშნოთ ნებისმიერად აღებული სიმრავლე Q_ω-ში და A_n ყოველი n-სთვის აღნიშნავს A-ს გეგმილს n განზომილებიან Q_n ტორი-სივრცეზე, მაშინ რიცხვითი მიმდევრობა

$$\mu_e A_1,\ \mu_e A_2, \mu_e A_3.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \mu_e A_n = \mu_e A.$$

ჟორდანის შიგა ზომა განისაზღვრება გარე ზომის საშუალებით. ეს გვაძლევს უსასრულო განზომილებიანი ჟორდანის ზომის განსაზღვრებას n განზომილებიანის საშუალებით. დამტკიცება: თავდაპირველად გვაქვს $\mu_e A_n \geqq \mu_e A$ ყველა n-სთვის. სხვა მხრივ, თუ $\varepsilon > 0$, მაშინ არსებობს A-ს დაფარვა სასრული რაოდენობა ინტერვალებით ისეთი, რომ მათი ზომის ჯამი $< \mu_e A + \varepsilon$, ყველა საკმარისად დიდი n-სთვის. ამ ინტერვალებს აქვს იგივე

ზომა, როგორიც აქვს მათ ნამრავლს Q_n-ზე, საკმარისად დიდი n-სთვის გვაქვს $\mu_e A_n < \mu_e A + \varepsilon$. შესაბამისი ლებეგის გარე ზომის დათვლა Q_ω -ში შეუძლებელია.

9. განსაზღვრული და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ლებეგის ზომის საფუძველზე ინტეგრებადი $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ფუნქციის ზომადობის ცნება ახლა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ.

პირველად ვთქვათ, რომ $f(x)$ არის ნამდვილი ფუნქცია Q_ω -ში. თუ ნებისმიერი a-სთვის წერტილთა სიმრავლე, სადაც $f(x) \geq a$, არის ზომადი სიმრავლე, მაშინ ჩვენ $f(x)$ ვუწოდებთ ზომად ფუნქციას. ვთქვათ, ეს სიმართლეა და განვიხილოთ ნებისმიერად აღებული სკალა

$$\ldots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$$

ზრდადი რიცხვებისთვის რომელიც $y_{-n} \to -\infty$ და $y_n \to \infty$ როცა $n \to \infty$ და შემდეგი რიცხვებისთვის

$$\overline{bound}(y_{n+1} - y_n) \tag{9.1}$$

არის სასრული. m_n-ით აღვნიშნავთ Q_ω -ს იმ ნაწილის ზომას, რომელიც გვაქვს $y_n \leqq f(x) < y_{n+1}$ მწკრივის სახით

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n m_n \quad . \tag{9.2}$$

თუ ზოგიერთი მასშტაბი ამ მწკრივის არის აბსოლუტურად კრებადი, მაშინ ის არის აბსოლუტურად კრებადი ნებისმიერი სახის სკალის გათვალისწინებით. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი და მისი ინტეგრალი არის განსაზღვრული, როგორც ზღვარი (9.2) მწკრივის ჯამის. როდესაც (9.1) მიისწრაფის ნულისაკენ ნებისმიერი გზით. კომპლექსურ $f(x) = u(x) + iv(x)$ ფუნქციას ეწოდება ზომადი ან ინტეგრებადი თუ ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქცია შესაბამისად არის ზომადი და ინტეგრებადი. შემდეგ შემთხვევაში ჩვენ განვსაზღვრავთ $f(x)$ -ის უსასრულო განზომილებიან ინტეგრალს

$$\int_{Q_\omega} f(x)dw_\omega \tag{9.3}$$

Q_ω -ზე, სადაც ინტეგრებადია ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილი ცალ-ცალკე.

ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არის ინტეგრებადი: უწყვეტი და ნამდვილი ფუნქცია არის ყოველთვის შემოსაზღვრული და წერტილთა სიმრავლე, რომელშიც $f(x) \geqq a$ ნებისმიერი a-სთვის, ჩაკეტილი და ზომადია. უნდა აღინიშნოს რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია Q_ω -ში განსაზღვრულია მხოლოდ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ცვლადებზე, მაშინ ის არის ზომადი ფუნქცია n განზომილებიან Q_n ტორი-სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ზომადია განხილული ფუნქცია Q_ω -ში. ფუნქცია არის ასევე ინტეგრებადი ერთად და ინტეგრალი Q_ω -ზე არის ექვივალენტური ინტეგრალის Q_n -ზე. ეს შენიშვნა შეიძლება იყოს განხილული, როგორც გამოხატულება n განზომილებიანი ინტეგრალის. როგორც კერძო შემთხვევა უსასრულო განზომილებიანის. მსგავსად, თუ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ ცვლადებზე, მაშინ ის არის ინტეგრებადი, როგორც ფუნქცია $Q_{n,\omega}$ -ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის ინტეგრებადი Q_ω -ზე და ინტეგრალი არის ექვივალენტური. ზოგჯერ ასე ვწერთ

$$\int_{Qn} f(x)dw_n \text{ ან } \int_{Q_{n,\omega}} f(x)dw_{n,\omega}$$

ნაცვლად (9.3) -ისა ამ შემთხვევაში.

ზუსტად, როგორც n განზომილებიანის შემთხვევაში გარემოება ნული ზომის სიმრავლეში არის არამნიშვნელოვანი ინტეგრირებისას. ორი ფუნქცია, რომელიც განსხვავდება მხოლოდ ნულოვანი სიმრავლით არ იქნება განხილული, როგორც განსხვავებული ფუნქცია და ფუნქცია ასევე განხილული იქნება, როგორც განსაზღვრული Q_ω -ში, თუ ის არის მხოლოდ გარეთ განსაზღვრული სიმრავლე ნული ზომის.

ინტეგრალს აქვს არსებითად იგივე ფუნდამენტალური თვისებები, როგორც ჩვეულებრივ ლებეგის ინტეგრალს. ეს გამომდინარეობს გადატანის პრინციპიდან. Q_ω -ში თუ აღვნიშნავთ $x = x(t)$ -ით q წრეწირს სიგრძით 1 აგებული შესაბამისი ბადის მნიშვნელობით Q_ω და q-ში. მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი $f(x)$ ფუნქციისთვის Q_ω -ში,

შესაბამისი $\varphi(t) = f(x(t))$ ფუნქციას q-ზე ექნება იგივე გადანაწილება მისი შეფასების, როგორც $f(x)$-ს იმ აზრით, რომ ნებისმიერი ნამდვილი a-სთვის წერტილთა სიმრავლე, სადაც ჩვენ გვაქვს $f(x) \geqq a$ და $\varphi(t) \geqq a$ ექნება იგივე გარე და შიგა ზომა. თუმცა ეს გულისხმობს, რომ ორი ფუნქცია $f(x)$ და $\varphi(t)$ იქნება ყოველთვის ზომადი ან ინტეგრებადი და მოგვიანებით შემთხვევაში იქნება ყოველთვის იგივე ინტეგრალით.

ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი Q_ω-ში არის აგრეთვე ძალიან მნიშვნელოვანი. E-ით აღვნიშნოთ ნებისმიერად აღებული ზომადი სიმრავლე Q_ω-ში. განვიხილავთ, რომ ფუნქცია განსაზღვრულია Q_ω-ში, რომელშიც E არის ექვივალენტური $f(x)$-ის და 0 სხვაგან. ეს ფუნქცია არის კვლავ ინტეგრებადი. ჩვენ აღვნიშნავთ ამ ინტეგრალს Q_ω-ზე, როგორც ინტეგრალს

$$F(E) = \int_E f(x) dw_\omega$$

$f(x)$-ის E სიმრავლეზე, ცვლადი E სიმრავლის $F(E)$ ფუნქციას ეწოდება $f(x)$-ის განუსაზღვრელი ინტეგრალი. გადატანის პრინციპიდან გამომდინარეობს ლებეგის ძირითადი თეორემა:

$F(E)$ ფუნქცია განსაზღვრული ყველა ზომად E სიმრავლეზე Q_ω-ში არის განუსაზღვრელი ინტეგრალი ინტეგრებადი $f(x)$ ფუნქციის Q_ω-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის დამატებითი და აბსოლუტურად უწყვეტი. თუ პირველ რიგში ნებისმიერი ორი E_1 და E_2 სიმრავლეებისთვის საერთო წერტილის გარეშე გვაქვს

$$F(E_1 + E_2) = F(E_1) + F(E_2)$$

და მეორე რიგში ნებისმიერი $F(E_1 + E_2) = F(E_1) + F(E_2)$ მისი შესაბამისი $\eta > 0$ ამრიგად მაშინ

$$|F(E)| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad mE < \eta .$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალი განსაზღვრავს ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას, მაგრამ როგორ მივიღოთ $f(x)$ როდესაც $F(E)$ არის მოცემული? ლებეგის თეორია სიმეტრიული წარმოებულების რა თქმა უნდა არ შეიძლება განზოგადდეს ჩვენს შემთხვევაში. ეს

გამომდინარეობს ფაქტიდან, რომ აქ არის წერტილის არასიმეტრიული მიდამო Q_ω-ში. ყველა ინტერვალი Q_ω-ში არის არასიმეტრიული. შეგვიძლია, თუმცა $F(E)$ ყოველთვის განსხვავებულია ნებისმიერ ბადეზე Q_ω-ში. ბადის აგება უფრო დიდი მნიშვნელობისაა თეორიისთვის ვიდრე დამტკიცების მარტივი გზა. დიფერენცირების თეორია, რომელსაც მივიღებთ:

ვთქვათ, რომ Q_ω-ს $D_1, D_2, D_3, \ldots$ დანაყოფების მიმდევრობა ბადის ფორმისაა და აღინიშნება $\Delta_n(x)$-ით. ნებისმიერი n ცვლადისთვის ნაბიჯ ფუნქცია, რომელშიც ნებისმიერი I_n ინტერვალი n განზომილებიანი D_n დანაყოფის არის ექვივალენტური შესაბამისი ნაწილის

$$\frac{F(I_n)}{mI_n},$$

მაშინ $\Delta_n(x)$ მიმდევრობა ფუნქციების მიისწრაფის $f(x)$-სკენ თითქმის ყველგან, როცა $n \to \infty$ Q_ω-ში.

დამტკიცება. q წრეწირზე სიგრძით 1 ავაგოთ ბადე $d_1, d_2, d_3, \ldots$, რომელიც შესაბამისია $D_1, D_2, D_3, \ldots$ ბადის Q_ω-ში. $x = x(t)$-ით აღვნიშნოთ q-ს შესაბამი გამოყენება Q_ω-ზე. $\Phi(e)$-ით აღვნიშნოთ განუსაზღვრელი $\varphi(t) = f(x(t))$ ფუნქციის ინტეგრალი q-ზე. მაშინ ნებისმიერი I_n ინტერვალისთვის Q_ω-ში და შესაბამისი i_n ინტერვალისთვის q-ზე გვექნება დამოკიდებულება

$$\frac{F(I_n)}{mI_n} = \frac{\Phi(i_n)}{mi_n}.$$

აქედან გამომდინარე, $\Delta_n(x)$ ფუნქციების მიმდევრობა Q_ω-ში მიისწრაფის $\varphi(t)$-ისკენ თითქმის ყველგან. მაგრამ მაშინ $\Delta_n(x)$ მიმდევრობა უნდა მიისწრაფოდეს $f(x)$-სკენ თითქმის ყველგან Q_ω-ში.

ბოლო თეორემაში გვაქვს ფუნდამენტალური საწყისი წერტილი, სასრული რაოდენობა ცვლადებისთვის, ინტეგრებადი ფუნქციების ღრმა შესწავლისთვის. ეს გვიჩვენებს, რომ დამოკიდებულება ამ ფუნქციებსა და სასრულ რაოდენობა ცვლადებზე

განსაზღვრულ ინტეგრებად ფუნქციებს შორის არ არის შორი, როგორიც შეიძლება იყოს დასაწყისიდან. ყოველი $\Delta_n(x)$ ფუნქცია ცხადია დამოკიდებულია მხოლოდ სასრულ რაოდენობა $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ცვლადებზე.

10. რიმანის ინტეგრალი

პრაქტიკაში ასევე შეგვიძლია გამოვიყენოთ სასრულ განზომილებიანი რიმანის ინტეგრალი. წარმოგიდგენთ ამ ინტეგრალს ჩვეულებრივი განსაზღვრებით.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია არის ნებისმიერად აღებული ფუნქცია Q_ω-ში, რომელიც არის ნამდვილი და შემოსაზღვრული და ნებისმიერი Q_ω-ს D დანაყოფისთვის ორი ჯამი

$$s(D) = \Sigma g(I) mI \text{ და } S(D) = \Sigma G(I) mI,$$

სადაც აჯამვა ხდება D-ს ყველა I ინტერვალზე, $g(I)$ და $G(I)$ აღნიშნავს $f(x)$-ის ქვედა და ზედა ზღვარს I-ში. ადვილი დასანახია, რომ

$$\overline{bound}\{s(D)\} \leqq \underline{bound}\{S(D)\},$$

სადაც ზედა და ქვედა ზღვარი მიმართებაშია Q_ω-ს ყველა D დაყოფასთან. ეს ორი რიცხვი განსაზღვრავს $f(x)$-ის ქვედა და ზედა რიმანის ინტეგრალს. თუ ისინი არიან ექვივალენტურები, მაშინ ვამბობთ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია რიმანის აზრით. ამ შემთხვევაში ადვილი დასანახია, რომ $f(x)$ ზომადია და ეს ინტეგრალი ექვივალენტურია რიმანის ინტეგრალის. როდესაც ვამბობთ, რომ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით, ვგულისხმობთ, რომ $f(x)$ არის ნამდვილი და შემოსაზღვრული.

ყველაზე ადვილი გზა რიმანის ინტეგრალთან გამკლავებისთვის არის, რომ ის წარმოვადგინოთ ლებეგის ინტეგრალით. თუ წარმოვადგენთ მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას, რომელიც ვთქვით, რომ ნამდვილი და შემოსაზღვრულია, ორი ფუნქციის სახით

$$\varphi(x) = \overline{bound}\{g(I_x)\} \text{ და } \Phi(x) = \underline{bound}\{G(I_x)\},$$

სადაც ზედა და ქვედა ზღვარი არის მიმართებაში x-ის მიდამოს ყველა I_x ინტერვალთან. ფუნქციები $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$ ორივე არის ნახევრად უწყვეტი. $\varphi(x)$ და $\Phi(x)$ ფუნქციების ინტეგრალი არის $f(x)$ ფუნქციის ზედა და ქვედა რიმანის ინტეგრალი. ამიტომ ჩვენ

მივიღეთ ჩვეულებრივი კრიტერიუმი რიმანის აზრით ინტეგრირების, რომ $\Phi(x)-\varphi(x)$ უნდა იყოს ნულოვანი ფუნქცია.

ასევე უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი შენიშვნა: $f(x)$ ფუნქცია არის ინტეგრებადი რიმანის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს შესაბამისი, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სთვის, ორი უწყვეტი ფუნქცია $a(x)$ და $A(x)$ ისეთი, რომ

$$a(x) \leqq f(x) \leqq A(x), \text{ ყველა } x\text{-სთვის}$$

და

$$\int_{Q_\omega} (A(x)-a(x))d\omega_\omega < \varepsilon$$

ყოველთვის შესაძლებელია, რომ ავირჩიოთ $a(x)$ და ყოველთვის შესაძლებელია, რომ ავირჩიოთ $A(x)$, ფუნქციები დამოკიდებულია მხოლოდ სასრულ რაოდენობა $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ცვლადებზე, შეგვიძლია ავიღოთ $a(x)$ და $A(x)$, როგორც სასრული ტრიგონომეტრიული პოლინომები.

$f(x)$ ფუნქცია, რომელიც ავიღეთ მხოლოდ სასრული რაოდენობა ცვლადებით არის ინტეგრებადი რიმანის აზრით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ წერტილთა სიმრავლე საიდანაც ეს ცვლადები ავიღეთ ყველა არის ზომადი ჟორდანის აზრით.

11. მნიშვნელოვანი ლემა

შემდეგ განხილვაში ზოგჯერ შევხვდებით Q_ω-ს $f(x)$ ფუნქციას, რომელისაც ისეთი თვისებები აქვს, რომ ნებისმიერი ორი x წერტილისთვის Q_ω-ში, რომელიც განსხვავდება მხოლოდ სასრული რაოდენობა კოორდინატებით ის არაა განსაზღვრული ორ წერტილში ან განსაზღვრულია და აქვს იგივე მნიშვნელობა. ამ თვისებას ვუწოდებთ თვისება S-ს. წერტილთა სიმრავლეს Q_ω-ში ვიტყვით, რომ აქვს თვისება S თუ ამ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას აქვს თვისება, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: თუ ნებისმიერი ორი წერტილი Q_ω-ში, რომელიც განსხვავდება მხოლოდ სასრული რაოდენობა კოორდინატებით ორივე ეკუთვნის სიმრავლეს ან ორივე ეკუთვნის დამატებით სიმრავლეს. სხვა გზა ასახსნელად, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს თვისება S არის ვთქვათ, რომ ნებისმიერი n-სთვის ფუნქცია არაა განსაზღვრული $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადებზე,

მაგრამ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფუნქცია $Q_{n,\omega}$-ში. ამ ფორმულირებით ბუნებრივია ვასკვნით, რომ ფუნქცია არ შეიძლება განსაზღვრული იყოს ნებისმიერზე, მაგრამ იქნება მუდმივი. თუ $f(x)$ ფუნქცია არის ზომადი, ეს სამართლიანია იმ აზრით, რომ ფუნქცია იქნება მუდმივი თითქმის ყველგან. ეს თეორემა და შესაბამისი თეორემა ზომადი სიმრავლისთვის არის ძალიან გამოყენებადი ლემა ბევრი შესაბამისობისთვის.

ზომადი $f(x)$ ფუნქცია Q_ω-ში, რომელსაც აქვს თვისება S, იქნება მუდმივი თითქმის ყველგან. ზომად სიმრავლეს თვისება S-ით აქვს ან ზომა O ან ზომა 1.

ცხადია საკმარისია დავამტკიცოთ თეორემა სიმრავლეებისთვის. დამტკიცება გამომდინარეობს ზემოთ მოცემული დიფერენცირების თეორემიდან. ვთქვათ, A აღნიშნავს ზომად სიმრავლეს Q_ω-ში თვისება S-ით და ვთქვათ, $f(x)$ არის A-ს მახასიათებელი ფუნქცია. ნებისმიერი n-ის მნიშვნელობისთვის შესაბამისი $\Delta_n(x)$ ფუნქცია იქნება მუდმივი და $=mA$. ეს გამომდინარეობს ფაქტიდან, რომ n-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის გვაქვს $A=(Q_nA'')$, A''-ით აღინიშნება A-ს გეგმილი $Q_{n,\omega}$-ზე. A არის ზომადი. აქედან გამომდინარეობს, რომ A'' ასევე იქნება ზომადი და $mA''=mA$. სხვა მხრივ, თუ $I=(I',Q_{n,\omega})$ აღნიშნავს ნებისმიერად აღებულ ინტერვალს Q_ω-ში თავისი I' ბაზით Q_n-ში, შემდეგ გვაქვს $AI=(I',A'')$ და შესაბამისად $mAI=m\mathrm{I'm}A''=m\mathrm{Im}A$. მაგრამ ეს დამტკიცება, რომელიც ჩვენ გვაქვს დანაყოფების ნებისმიერი I_n ინტერვალისთვის, რომელიც $\Delta_n(x)$ ეკუთვნის

$$\int_{I_n} f(x)d\omega_\omega = mAI_n = mI_n mA$$

შესაბამისად $\Delta_n(x)=mA$ Q_ω-ს ყველა წერტილში. აქედან გამომდინარე, რადგან $\Delta_n(x)\to f(x)$ თითქმის ყველგან და რადგან $f(x)$ მხოლოდ ორ მნიშვნელობას იღებს 0 და 1, უნდა გვქონდეს ან $mA=0$ ან $mA=1$.

აქ არის შესაბამის თეორემა, რომ თუ ერთი ნამდვილი ცვლადის ზომად ფუნქციას აქვს ნებისმიერად აღებული პატარა წერტილი, მაშინ ის იქნება მუდმივი თითქმის ყველგან. განვიხილოთ შემდეგი ფორმის მწკრივები

$$f(z,x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{2\pi i x_k}z^{k-1}, \qquad (11.1)$$

სადაც a_k არის მოცემული რიცხვები. ყველა ამ მწკრივს აქვს იგივე კრებადობის რადიუსი. ვთქვათ ეს რადიუსი r>0 და სასრულია. ნებისმიერი $x=(x_1,x_2,x_3,...)$ წერტილისთვის Q_ω-ში (11.1)-ის შესაბამისად, ანალიზური $f(z,x)$ ფუნქცია $|z|<r$-ში. განვიხილოთ ამ ფუნქციებიდან ის, რომელიც არ არის უწყვეტი. x-ის შესაბამის სიმრავლეს Q_ω-ში აქვს თვისება S და ის ასევე არის ზომადი. დამტკიცება გამომდინარეობს შენიშვნიდან, რომ ის არის x-ის სიმრავლე Q_ω-ში, რომლისთვისაც

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\left[\frac{|f^{(p)}(z,x)|}{p!}\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{r-|z|}$$

ყველა წერტილისთვის $z=a+ib$ $|z|<r$-ში, სადაც a და b არის რაციონალური. შესაბამისად ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ზომადი სიმრავლე ყოველთვის არის ან 0 ან 1 ზომის. სტეინჰაუსმა დაამტკიცა რომ ის არის ყოველთვის და მოგვიანებით შემთხვევაში, რომელიც მოხდება და ამრიგად მოგვეცემა ძალიან ბუნებრივი ინტერპრეტაციით ამ თეორემის რომ თითქმის ყველა მძლავრი მწკრივი არ არის უწყვეტი. ზოგად თეორემაში დირიხლეს მწკრივებისთვის იყო დამტკიცებული პელისა და ზიგმუნდის მიერ. ჩვენ დავეთანხმებით ამ თეორემის განზოგადებას შემდეგ თავში.

12. ფუბინის თეორემის გამოყენება

ჩვენი პირველი პრობლემა მოცემული იქნება ფუბინის თეორემის გაფართოებაში, ინტეგრალის სივრცეში მარტივ ინტეგრალად დაყვანასთან დაკავშირებით, ამ შემთხვევაში უსასრულო განზომილებიან ინტეგრალად. ამ მიზნისთვის ჩვენ გვჭირდება გამოვიყენოთ ფუბინის შემდეგი თეორემა სასრულ რაოდენობა ცვლადიანი ფუნქციისთვის.

ვთქვათ რომ კოორდინატთა მიმდევრობა $x_1,x_2,x_3,...$ გაყოფილ იქნა სასრულ რაოდენობა სიმრავლეებად

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots$$
$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots;$$

ზოგიერთი ამ სიმრავლეებიდან შეიძლება იყოს სასრული. თუ $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ წერტილი აღწერს Q_ω-ს, მაშინ ყველა ეს $x^{(v)} - (x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, x_3^{(v)}, \ldots)$ წერტილი, სადაც $1 \leqq v \leqq u$ აღწერს მთავარ ტორი-სივრცეს, რომელიც აღვნიშნეთ $Q^{(v)}$-ით და რომელიც შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო განზომილებიანი. ჩვეულებრივ ვწერთ ასე $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ და $Q_\omega = (Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(n)})$. მაშინ გვაქვს შემდეგი თეორემა:

თუ $f(x)$ ფუნქცია აღნიშნავს ნებისმიერად აღებულ ინტეგრებად ფუნქციას Q_ω-ში, მაშინ გვაქვს

$$\int\limits_{Q_\omega} f(x) d\omega_\omega = \int\limits_{Q^{(n)}} d\omega^{(n)} \ldots \int\limits_{Q^{(2)}} d\omega^{(2)} \int\limits_{Q^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) d\omega^{(1)},$$

სადაც ინტეგრალები დათვლილია მარჯვნიდან მარცხნივ, რომელიც ყოველთვის შესაძლებელია თითქმის ყველგან.

დამტკიცება გამომდინარეობს გადატანის პრინციპიდან. ყოველ $Q^{(v)}$ ტორი-სივრცეში ავაგოთ დაყოფების $D_1^{(v)}, D_2^{(v)}, D_3^{(v)}, \ldots$ მიმდევრობა, რომელიც არის $Q^{(v)}$-ის ბადიდან და ავაგოთ ასევე დაყოფების შესაბამისი $d_1^{(v)}, d_2^{(v)}, d_3^{(v)}, \ldots$ ბადე $q^{(v)}$ წრეწირზე სიგრძით 1. ამ ბადით არის განსაზღვრული $q^{(v)}$-ის $x^{(v)} = x^{(v)}(t^{(v)})$-ის გამოყენება $Q^{(v)}$-ზე, სადაც $t^{(v)}$ აღნიშნავს პარამეტრს $q^{(v)}$-ზე. ნებისმიერი m-სთვის $D_m^{(1)}, D_m^{(2)}, \ldots, D_m^{(n)}$ დაყოფა წარმოშობილია Q_ω-ს D_m ძირითადი დაყოფისგან, ყოველი ინტერვალი D_m ინტერვალების ნამრავლია, რომელიც ერთი მათგანია $D_m^{(v)}$-დან. იგივე გზით $d_m^{(1)}, d_m^{(2)}, \ldots, d_m^{(n)}$ დაყოფა წარმოშობილია n განზომილებიანი სივრცის d_m დაყოფისგან q აღწერილია წერტილით $t = (t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)})$. ორი მიმდევრობა $D_1, D_2, D_3, \ldots$ და $d_1, d_2, d_3, \ldots$ აშკარად განსაზღვრავს შესაბამის ბადეს Q_ω-ში და q-ში და q-ს $x = x(t)$-ს გამოყენება Q_ω-ზე, რომელიც ამ ბადეებს გაზრდა არის ზუსტად ეს განაცხადი

$(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}) = (x^{(1)}(t^{(1)}), x^{(2)}(t^{(2)}), ..., x^{(n)}(t^{(n)}))$. ამრიგად, თუ ჩვენ განვაცხადებთ ჩვეულებრივ თეორემას ფუბინის Q_n სივრცისთვის $\varphi(t) = f(x(t))$ ფუნქციაზე მივიღებთ თეორემას.

13. უსასრულოდ ჯერადი ინტეგრალი

ფუბინის თეორემის გაგრძელება შეგვიძლია ფუნქციის სასრული რაოდენობა ცვლადებით. $f(x)$-ით აღვნიშნოთ ინტეგრებადი ფუნქცია Q_ω-ში და დავწერთ ასე $Q_\omega = (Q_n, Q_{n,\omega})$. თეორემის ბოლო ნაწილიდან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალი

$$\int_{Q_n} f(x) d\omega_n = \int_{c_n} dx_n ... \int_{c_2} dx_2 \int_{c_1} f(x_1, x_2, x_3, ...) dx_1 \tag{13.1}$$

არსებობს, როგორც $x_{n+1}, x_{n+2}, ...$ ცვლადების ინტეგრებადი ფუნქცია განსაზღვრული თითქმის ყველგან $Q_{n,\omega}$-ში. აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის ინტეგრალი $Q_{n,\omega}$-ზე არის ექვივალენტური $f(x)$-ის Q_ω-ზე. რომელიც აღვნიშნეთ A-ით. ეს ბევრად მოსახერხებელია შემდეგი მოსაზრებების განხილვისთვის ინტეგრალი (13.1) არა როგორც ფუნქცია $Q_{n,\omega}$-ში, არამედ, როგორც ფუნქცია Q_ω-ში, რომელიც არაა განსაზღვრული $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადებზე. ამ ფუნქციას აღვნიშნავთ $f_{n,\omega}(x)$-ით, ყველა n-სთვის გვაქვს

$$\int_{Q_\omega} f_{n,\omega}(x) d\omega_\omega = A.$$

თეორემა, რომლის დამტკიცებასაც ვაპირებთ მდგომარეობს იმაში, რომ ფუნქციათა $f_{1,\omega}(x), f_{2,\omega}(x), f_{3,\omega}(x), ...$ მიმდევრობა არის კრებადი თითქმის ყველგან Q_ω-ში და რომ ზღვრული ფუნქცია არის ზუსტად მუდმივი A. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გვაქვს თეორემა: თუ $f(x)$ არის ნებისმიერად აღებული ინტეგრებადი ფუნქცია Q_ω-ზე, მაშინ

$$\int_{Q_\omega} f(x) d\omega_\omega = \lim_{n\to\infty} \int_{c_n} dx_n ... \int_{c_2} dx_2 \int_{c_1} f(x_1, x_2, x_3, ...) dx_1$$

Q_ω-ს თითქმის ყველა წერტილისთვის.

დამტკიცებისათვის საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, სადაც $f(x)$ არის ნამდვილი ფუნქცია. ასევე საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ გვაქვს

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_{n,\omega}(x) \leqq A$$

თითქმის ყველგან Q_ω -ში. შემდეგი ვიტყვით ასე - $f(x)$ ნაცვლად $f(x)$ -ისა. აქედან გამომდინარეობს, რომ აგრეთვე გვაქვს

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_{n,\omega}(x) \geqq A$$

თითქმის ყველგან Q_ω -ში. ფუნქციას აშკარაა აქვს თვისება S.

$$\Phi(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_{n,\omega}(x)$$

ცხადია, რადგან $f_{n,\omega}(x)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადებზე. ცვლადების შეცვლა სასრული რაოდენობა ცვლადებით არ იქნება ალტერნატივა $\Phi(x)$ -ის. აქედან გამომდინარე ფუნდამენტალური ლემიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi(x)$ უნდა იყოს მუდმივი და ვიტყვით, რომ $\Phi(x) = B$ თითქმის ყველგან. იმისთვის რომ დავამტკიცოთ $A \geqq B$ უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა: E -ით აღვნიშნოთ წერტილთა სიმრავლე, სადაც

$$\overline{bound}\{ f_{n,\omega}(x)\} = \overline{bound}\{ f_{1,\omega}(x), f_{2,\omega}(x), f_{3,\omega}(x), ...\} > K \tag{13.2}$$

მაშინ

$$\int_E f(x) d\omega_\omega \geqq KmE \tag{13.3}$$

პირველად დავამტკიცოთ ის ლემა, როცა $A \geqq B$. ცხადია, თუ ავირჩევთ $K < B$, ეს გამომდინარეობს დამოკიდებულებიდან $\Phi(x) > K$ თითქმის ყველგან Q_ω -ში, რომ ეს დამოკიდებულება (13.2) ასევე უნდა იყოს სამართლიანი თითქმის ყველგან Q_ω -ში შესაბამისად სიმრავლე E Q_ω -გან განსხვავდება მხოლოდ ნულოვანი სიმრავლით და ეს აგრეთვე გამომდინარეობს (13.3)-დან, მაშინ გვაქვს

$$\int_{Q_\omega} f(x) d\omega_\omega \geqq K$$

და რადგან ეს არის სამართლიანი ნებისმიერი $K < B$ -სთვის, მივიღებთ, რომ $A \geqq B$.

ჩვენ ვამტკიცებთ ლემას $N \to \infty$ გზით შემდეგ მეტად ელემენტარულ ლემაში:

E_N -ით აღვნიშნოთ წერტილთა სიმრავლე, სადაც

$$\overline{bound}\{ f_{1,\omega}(x), f_{2,\omega}(x), ..., f_{N,\omega}(x)\} > K \tag{13.4}$$

მაშინ

$$\int_{E_N} f(x) d\omega_\omega \geqq KmE_N \tag{13.5}$$

B_n -ით აღვნიშნოთ წერტილთა სიმრავლე Q_ω -ში, რომელშიც $f_{n,\omega}(x) > K$. მაშინ აშკარაა რომ გვაქვს

$$E_N = B_N + B_{N-1}B_N^* + B_{N-2}B_N^* B_{N-1}^* + ... + B_1 B_N^* B_{N-1}^* ... B_2^*$$

სადაც იმ მომენტისთვის როცა ფიფქი არის გამოყენებული მითითებული დამატებითი სიმრავლისთვის Q_ω -ს მიმართებაში. ჩვენ ვწერთ აბრევიატურას

$$A_n = B_n B_N^* B_{N-1}^* ... B_{n+1}^*,$$

სიმრავლე B_n არის ნებისმიერი n-სთვის ცილინდრი, რომლის საფუძველი არის $Q_{n,\omega}$ -ში, აქედან გამომდინარეობს, რომ A_n აგრეთვე იქნება ასეთი ცილინდრი. დავწეროთ $A_n = (Q_n, A_n'')$, სადაც A_n'' არის A_n -ის გეგმილი $Q_{n,\omega}$ -ზე, შემდეგ მივიღებთ

$$\int_{A_n} f(x) d\omega_\omega = \int_{A_n^"} d\omega_{n,\omega} \int_{Q_n} f(x) d\omega_n \int_{A_n^"} f_{n,\omega}(x) d\omega_{n,\omega} \int_{A_n} f_{n,\omega}(x) d\omega_\omega .$$

A_n შედის B_n -ში. ამრიგად, $f_{n,\omega}(x) > K$ A_n -ში და ამგვარად მივიღეთ

$$\int_{A_n} f(x) d\omega_\omega \geqq KmA_n .$$

$n = 1, 2, ..., N$ -სთვის ეს დამოკიდებულება და იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ A_n -ის ორი სიმრავლეს არ აქვს საერთო წერტილი, ჩვენ მივიღებთ (13.5) დამოკიდებულებას.

14. ფუნქციის წარმოდგენა როგორც ზღვრული ინგეგრალი

ესაა თეორემა, რომელიც გარკვეულწილად გაიგება ორი აზრით. კვლავ განვიხილავთ ნებისმიერად აღებულ ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას Q_ω -ში და ნებისმიერი n -სთვის ინტეგრალი

$$\int_{Q_{n,\omega}} f(x) d\omega_{n,\omega}$$

(მე-12 პარაგრაფის მიხედვით) არის ინტეგრებადი ფუნქცია $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების მიმართ თითქმის ყველგან Q_n -ში. მეტი მოხერხებულობისთვის სასურველია უკანასკნელი განვიხილოთ არა როგორც ფუნქცია Q_n -ში, არამედ როგორც ფუნქცია Q_ω -ში. ეს ფუნქცია, რომელიც არ არის დამოკიდებული $x_{n+1}, x_{n+2}...$ ცვლადებზე, აღვნიშნოთ $f_n(x)$ -ით.

ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა. ფუნქციათა მიმდევრობა $f_1(x), f_2(x), f_3(x),...$ კრებადია თითქმის ყველგან Q_ω -ში და მისი ზღვრული ფუნქცია არის ზუსტად თავად $f(x)$ ფუნქცია.

სხვაგვარად ეს დებულება შეიძლება ასეც ჩამოყალიბდეს: თუ $f(x)$ ფუნქცია არის ინტეგრებადი ფუნქცია Q_ω -ში, მაშინ

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{p\to\infty}\int_{c_{n+p}} dx_{n+p} \dots \int_{c_{n+2}} dx_{n+2} \int_{c_{n+1}} f(x_1, x_2, x_3, ...) dx_{n+1}\right\}$$

თითქმის ყველგან Q_ω -ში.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ დიფერენცირების თეორემა ბადეზე. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ -ით აღვნიშნოთ ისეთი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომ მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ იყოს კრებადი და $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ -ით აღვნიშნოთ ისეთი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა, რომელიც მიისწრაფის ნულისკენ. ჩვენი მიზანია ავაგოთ Q_ω -ის დაყოფების $D_1, D_2, D_3, \dots$ მიმდევრობა, რომელიც წარმოდგება ბადით და რომელსაც აქვს შემდეგი

თვისებები. ნებისმიერი n-სთვის დაყოფა D_n წარმოქმნილი იქნება Q_n-ის ძირითადი დაყოფისგან, უფრო მეტიც აღინიშნება მე-9 თავში განსაზღვრული $\Delta_n(x)$ ფუნქციით, რომელიც ეკუთვნის D_n-ს და E_n-ით აღინიშნება Q_ω-ს წერტილთა სიმრავლე, სადაც

$$|\Delta_n(x) - f_n(x)| < \delta_n \tag{14.1}$$

უნდა გვქონდეს $mE_n > 1-\varepsilon_n$.

ვთქვათ, რომ გვაქვს ასეთი ბადე Q_ω-ში, მაშინ ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია. ცხადია, მე-9 პარაგრაფიდან ვიცით, რომ $\Delta_n(x) \to f(x)$ თითქმის ყველგან Q_ω-ში. ამრიგად, რაც უნდა დავამტკიცოთ არის, რომ ბადის თვისებები გულისხმობს $\Delta_n(x) - f_n(x) \to 0$-ს თითქმის ყველგან Q_ω-ში. თუმცა ეს ნათელია, თუ გავითვალისწინებთ, რომ Q_ω-ს კრებადი მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ თითქმის ყველა x წერტილში საბოლოო ჯამში ეკუთვნის $E_1, E_2, E_3, \ldots$ მიმდევრობის სიმრავლეს და ნებისმიერი ასეთი წერტილისთვის თვისება გამომდინარეობს იქიდან გამომდინარე, რომ $\delta_n \to 0$ როცა $n \to \infty$.

რჩება ავაგოთ ბადე Q_ω-ში აუცილებელი თვისებით. ვთქვათ, ეს $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ დაყოფები უკვე აგებულია. D_{n-1} წარმოშობილია Q_{n-1}-ის ძირითადი დაყოფისგან, აქედან გამომდინარე Q_n-სგან. ახლა უნდა ავიღოთ Q_ω-ს დაყოფების $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)}, \ldots$ მიმდევრობა. დავიწყოთ D_{n-1}-ით, რომელიც წარმოქმნილია Q_n-ის დაყოფისგან. ეს დაყოფები ფორმირდება ბადედ Q_n-ში $D^{(v)}$-ის $I^{(v)}$ ინტერვალისთვის გვაქვს $f_n(x)$ დამოკიდებულია მხოლოდ $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ზე.

$$\int_{I^{(v)}} f(x)d\omega_\omega = \int_{I^{(v)}} f_n(x)d\omega_\omega$$

ამრიგად ეს $\Delta^{(v)}(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია

$$\Delta^{(v)}(x) = \frac{1}{mI^{(v)}}\int_{I^{(v)}} f(x)d\omega_\omega$$

ნებისმიერ $D^{(v)}$-ის $I^{(v)}$ ინტერვალში არის ექვივალენტური შესაბამისი ფუნქციის, სადაც $f(x)$ გადანაცვლდა $f_n(x)$-ით. აქედან გამომდინარე, რადგან $D^{(1)}, D^{(2)}, D^{(3)},...$ მიმდევრობა იყო წარმოშობილი ბადის მიერ Q_n-ში და აქედან გამომდინარე $f_n(x)$ არაა განსაზღვრული $x_{n+1}, x_{n+2}...$-ზე, ეს გამომდინარეობს დიფერენცირების თეორემიდან ბადეზე Q_n-ში გვექნება $\Delta^{(v)}(x) \to f_n(x)$ თითქმის ყველგან Q_ω-ში. ამგვარად, ნებისმიერი საკმარისად დიდი მნიშვნელობის v-სთვის გვექნება ეგოროფის თეორემა.

$$|\Delta^{(v)}(x) - f_n(x)| < \delta_n$$

ზომის სიმრავლეში $> 1-\varepsilon_n$, და შესაბამისად (14.1)-ში შესრულებული იქნება თუ ავიღებთ $D_n = D^{(v)}$, ამ გზით მივიღებთ დაყოფების $D_1, D_2, D_3,...$ მიმდევრობას, სადაც D_{n+1} არის ყოველთვის D_n-ის ქვედაყოფა, მაგრამ არ შეგვიძლია ვიყოთ დარწმუნებულები, რომ ბადის დაყოფის ეს ფორმა Q_ω-ში ადვილად შეგვიძლია მივიღოთ. მხოლოდ გვჭირდება D_n-ის დაყოფაში ყურადღება მივაქციოთ, რომ ყველა ინტერვალების კიდე-სიგრძე, წარმოშობილი Q_n-ის დაყოფებისგან, არის $< \frac{1}{n}$, რომელიც სამართლიანი იქნება თუ ავირჩევთ v-ს საკმარისად დიდს.

15. ძლიერად კრებადობა

ჯერჯერობით ერთადერთი ცნება კრებადობის, რომელზეც ვიმუშავეთ არის კრებადობა თითქმის ყველგან. ამ აზრით მე-9, მე-13, მე-14 თავებში მივიღეთ შედეგი

$$\Delta_n(x) \to f(x), \quad f_{n,\omega}(x) \to A \quad \text{და} \quad f_n(x) \to f(x). \tag{15.1}$$

თუმცა კრებადობის სხვა ცნებაცაა, რომელიც გამოყენებისთვის მეტად მნიშვნელოვანია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ყველა ძლიერად კრებადობის ცნება. აქედან გამომდინარე, ის არის არა ინტერესისთვის რომ ზღვრული დამოკიდებულება (15.1) არის ასევე სამართლიანი, როდესაც ისარი არი გამოყენებული კრებადობის აღსანიშნად.

ვამბობთ, რომ ზომადი $f(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის L^p კლასს, სადაც $p \geqq 1$ თუ $|f(x)|^p$ არის ინტეგრებადი. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ორივე ეკუთვნის L^p-ს განვსაზღვრავთ მათ დისტანციას

$$D_p(f,g)=\left[\int_{Q_\omega}|f(x)-g(x)|^p\,d\omega_\omega\right]^{\frac{1}{p}}.$$

თუ $h(x)$ არის ნებისმიერი ფუნქცია L^p-ზე ეს გამომდინარეობს მინკოვსკის უტოლობიდან მაშინ გვაქვს $D_p(f,g)\leqq D_p(f,h)+D_p(g,h)$, რომელიც ჩვეულებრივ არის სამკუთხედის უტოლობა.

ფუნქციათა $h_1(x),h_2(x),h_3(x),\ldots$ მიმდევრობას ეწოდება ძლიერად კრებადი L^p კლასში $f(x)$ ფუნქციის მიმართ თუ $D_p(f,h_n)\to 0$, როცა $n\to\infty$. ასეთი მიმდევრობა არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ძლიერად კრებადი სხვა $g(x)$ ფუნქციისკენ. ცხადია, $D_p(f,g)\leqq D_p(f,h_n)+D_p(g,h_n)$-დან გამომდინარეობს $D_p(f,g)\to 0$, რომელიც შესაძლებელი არის მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)-g(x)=0$ თითქმის ყველგან.

თეორემა. თუ $f(x)$ ეკუთვნის L^p კლასს, სადაც $p\geqq 1$ მაშინ დამოკიდებულება (15.1) არის ყოველთვის სამართლიანი არა მხოლოდ თითქმის ყველგან კრებადობის აზრით, არამედ ძლიერად კრებადობის აზრით L^p კლასში.

$\Delta_n(x)\to f(x)$ დამოკიდებულება გამომდინარეობს შესაბამის თეორიაში სასრულ რაოდენობა ცვლადების გადატანის პრინციპიდან. $\Delta_n(x)$ ფუნქციათა მიმდევრობა ბადის შესაბამისი $D_1,D_2,D_3,\ldots$სთვის, ავაგეთ მე-9 პარაგრაფის ბოლოში სიგრძით 1 q წრეწირის შესამაბისი $d_1,d_2,d_3,\ldots$ ბადე. თუ შემდეგ გამოვიყენებთ q-ს Q_ω-ში ამ გზით აღებული აღნიშნული $x=x(t)$ ფუნქცია $\varphi(t)=f(x(t))$ q-ზე ასევე ეკუთვნის L^p და მიმდევრობა $\Delta_n(x)$ შესაბამისი ფუნქციათა მიმდევრობა q-ში, რომელიც მიისწრაფის ძლიერად $\varphi(t)$-სკენ L^p-ში.

ამ თეორემიდან ვასკვნით შესაბამის შედეგს მიმდევრობისთვის $f_{n,\omega}(x)$ და $f_n(x)$. ვთქვათ, რომ ბადე $D_1,D_2,D_3,\ldots$, რომელიც $\Delta_n(x)$ მიმდევრობას ეკუთვნის არის ისეთი რომ D_n არის ყოველთვის ნაწარმოები Q_n-ის დაყოფებისგან. შედეგი გამომდინარეობს ორი უტოლობიდან

$$D_p(f_{n,\omega}(x),A)\leqq D_p(f,\Delta_n)\ \text{და}\ D_p(f_n,\Delta_n)\leqq D_p(f,\Delta_n),$$

რომელიც ჩვენ მივიღეთ მსგავსი უტოლობიდან დამოკიდებულებით

$$\int_{Q_\omega} | f_{n,\omega}(x) - A|^p \, d\omega_\omega = \int_{Q_{n,\omega}} | f_{n,\omega}(x) - A|^p \, d\omega_{n,\omega} =$$

$$= \int_{Q_{n,\omega}} \left| \int_{Q_n} (f(x) - \Delta_n(x)) d\omega_\omega \right|^p d\omega_{n,\omega} \leqq$$

$$\leqq \int_{Q_{n,\omega}} d\omega_{n,\omega} \int_{Q_n} | f(x) - \Delta_n(x)|^p \, d\omega_n = \int_{Q_\omega} | f(x) - \Delta_n(x)|^p d\omega_\omega$$

და

$$\int_{Q_\omega} | f_n(x) - \Delta_n(x)|^p \, d\omega_\omega = \int_{Q_n} | f_n(x) - \Delta_n(x)|^p d\omega_n =$$

$$= \int_{Q_n} \left| \int_{Q_{n,\omega}} (f(x) - \Delta_n(x)) d\omega_{n,\omega} \right|^p d\omega_n \leqq$$

$$\leqq \int_{Q_n} d\omega_n \int_{Q_{n,\omega}} | f(x) - \Delta_n(x)|^p \, d\omega_{n,\omega} = \int_{Q_\omega} | f(x) - \Delta_n(x)|^p d\omega_\omega \, .$$

16. მაჟორანტული კრებადობა

$h_1(x), h_2(x), h_3(x), \ldots$ -ით აღვნიშნოთ ფუნქციათა მიმდევრობა Q_ω -ში. ფუნქციას

$$H(x) = \overline{bound} \, | h_n(x) |$$

ეწოდება მიმდევრობის მაჟორანტი. ყველა შემთხვევაში, სადაც ფუნქციათა მიმდევრობა არის ცნობილი, როგორც კრებადი გვაქვს ინტერესი შევისწავლოთ მიმდევრობის მაჟორანტი. ამ ამოცანას განვიხილავთ იმ შემთხვევაში, როდესაც $h_n(x)$ თითოეული ამ სამი მიმდევრობიდან $\Delta_n(x)$, $f_{n,\omega}(x)$ ან $f_n(x)$ მიმაგრებულია ინტეგრებად ფუნქციაზე $f(x)$ -ზე Q_ω -ში. შედეგი მოცემულია შემდეგ თეორემაში:

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის L^p კლასს, სადაც $p>1$, მაშინ იგივე სამართლიანია მაჟორანტი $H(x)$-სთვის ნებისმიერი 3 ფუნქციის $\Delta_n(x)$, $f_{n,\omega}(x)$ და $f_n(x)$ და ნებისმიერი ამ 3 ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\int_{Q_\omega} (H(x))^p d\omega_\omega \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{Q_\omega} |f(x)|^p \, d\omega_\omega \tag{16.1}$$

ეს თეორემა ძალიანაა დაკავშირებული ძალიან ცნობილ ჰარდი და ლითლევუდის მაქსიმიზაციის თეორემასთან. ეს მოსახერხებელია თუმცა, დავურთოთ ჩვენი მტკიცებულება არა უკანასკნელს, არამედ ლემას, რომელიც მნიშვნელოვანია შედიოდეს რიესეს დამტკიცებაში მაქსიმიზაციის თეორემაში. პირველ რიგში დავაკვირდეთ, რომ საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, სადაც $f(x)$ არის ნამდვილი და $\geqq 0$. ეს გამომდინარეობს ფაქტიდან, რომ ნებისმიერ სამ ჰიპოთეზაში მაჟორანტი $H(x)$ არ არის კლებადი, როდესაც შევცვლით $f(x)$-ს $|f(x)|$-ით. ლემა ასე ჩამოყალიბდება:

ვთქვათ, რომ ორი ფუნქცია $f(x) \geqq 0$ და $H(x) \geqq 0$ საკმარისია ნებისმიერი K-სთვის პირობით

$$\int_E f(x) d\omega_\omega \geqq kmE\,, \tag{16.2}$$

სადაც E აღნიშნავს წერტილთა სიმრავლეს, რომელშიც $H(x)>K$, მაშინ თუ $f(x)$ ეკუთვნის L^p-ს, სადაც $p>1$ იგივე არის სამართლიანი $H(x)$-სთვის და

$$\int_{Q_\omega} (H(x))^p d\omega_\omega \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{Q_\omega} (f(x))^p d\omega_\omega \tag{16.3}$$

ამ ლემიდან მტკიცდება ზემოთ მოცემული თეორემა. მხოლოდ გვჭირდება დავამტკიცოთ, რომ თუ $f(x) \geqq 0$ ფუნქცია $f(x)$ და $H(x)$ იქნება საკმარისი ლემის პირობებისთვის. $h_n(x) = f_{n,\omega}(x)$ ამ შემთხვევაში ეს არის მე-13 თავის ლემის შედეგი, შემთხვევაში სადაც $h_n(x)$ არის ან $\Delta_n(x)$ ან $f_n(x)$, ვასკვნით ამ შედეგს შემდეგი ლემიდან, რომელიც არის მე-13 თავში განხილული ლემის ანალოგი:

ვთქვათ, რომ $f(x)$ არის ნამდვილი და რომ $h_n(x)$ არის ან $\Delta_n(x)$ ან $f_n(x)$, მაშინ თუ აღვნიშნავთ E-ში წერილთა სიმრავლეს, სადაც

$$\overline{bound}\{h_n(x)\} > K \tag{16.4}$$

გვაქვს

$$\int_E f(x)d\omega_\omega \geqq kmE \tag{16.5}$$

ამის დამტკიცება უფრო მარტივია ვიდრე მე-13 თავში განხილულის. აღვნიშნოთ B_n-ით წერტილთა სიმრავლე Q_ω-ში სადაც $h_n(x) > K$, მაშინ

$$E = B_1 + B_2B_1^* + B_3B_1^*B_2^* + \dots$$

სადაც ფიფქი აღნიშნავს დამატებით სიმრავლეს Q_ω-ს მიმართ.

მოკლედ ასე ჩავწერთ

$$A_n = B_nB_1^*B_2^*\dots B_{n-1}^*,$$

სადაც $h_n(x) = f_n(x)$ B_n-ის სიმრავლე არის შექმნილი ინტერვალის განსაზღვრული რაოდენობით აღებული Q_ω დაყოფებისგან, რომელიც $\Delta_n(x)$-ს ეკუთვნის. გამომდინარეობს რომ იგივე არის სამართლიანი A_n სიმრავლისთვის .შესაბამისად გვაქვს

$$\int_{A_n} f(x)d\omega_\omega = \int_{A_n} \Delta_n(x)d\omega_\omega,$$

როდესაც $h_n(x) = f_n(x)$ B_n სიმრავლის არის ცილინდრი Q_n-ში. გამომდინარეობს რომ A_n აგრეთვე არის მსგავსი ცილინდრი. ვწერთ ასე $A_n = (A_n^{'}, Q_{n,\omega})$, სადაც $A_n^{'}$ არის A_n-ის დამატება Q_n-ში. მაშინ გვაქვს

$$\int_{A_n} f(x)d\omega_\omega = \int_{A_n} d\omega_\omega \int_{Q_{m,\omega}} f(x)d\omega_{n,\omega} = \int_{A_n} f_n(x)d\omega_n = \int_{A_n} f_n(x)d\omega_\omega$$

ორივე შემთხვევაში სიმრავლე A_n შედის B_n-ში. აქედან გამომდინარე $h_n(x) > K$ A_n-ში და მივიღებთ

$$\int_{A_n} f(x) d\omega_\omega \geq k m A_n$$

ამ უტოლობების დამატებით $n = 1, 2, 3, \ldots$ -სთვის მივიღებთ სასურველ უტოლობას (16.5)

იმ შემთხვევაში სადაც $p = 1$ თეორემა არაა სამართლიანი. არაა რთული ავაგოთ მაგალითი საჩვენებლად, რომ ამ შემთხვევაში მაჟორანტი $H(x)$ არ უნდა იყოს ინტეგრებადი.

თუ $e^{\lambda |f(x)|^2}$ არის ინტეგრებადი ზოგიერთი $\lambda > 0$ -სთვის, მაშინ იგივე არის შემთხვევა ფუნქციისთვის $e^{\lambda (H(x))^2}$ ნებისმიერ სამ ჰიპოთეზაში და

$$e^{\lambda (H(x))^2} d\omega_\omega - 1 \leq 4 \left(\int_{Q_\omega} e^{\lambda |f(x)|^2} d\omega_\omega - 1 \right). \tag{16.6}$$

დამტკიცება გამომდინარეობს იქიდან როცა ჩვენ მივიღეთ გამოსახულება $e^{\lambda y^2}$ -სთვის და გამოვიყენეთ ფაქტი, რომ $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ არის p-ს კლებადი ფუნქცია.

17. ფურიეს მწკრივები

ორთონორმირებული სისტემის ზოგადი თეორია, კერძოდ, ფიშერის თეორემა და პარსევალის განტოლება, Q_ω -ზე განსაზღვრული ფუნქციებისთვის გამომდინარეობს სიტყვა-სიტყვით ჩვეულებრივი არგუმენტირების გამეორებით ან მარტივად გამომდინარეობს გადატანის პრინციპის გამოყენებით. ამ თვალსაზრისისგან განსხვავებით, ჩვეულებრივი ფურიეს მწკრივების თეორიის განზოგადება საჭიროებს Q_ω სივრცისთვის დამახასიათებელ ახალ მიდგომებს.

ჩვენ ნებისმიერი საკოორდინატო c_k წრეწირისთვის განვიხილავთ რხევათა სისტემას

$$e^{2\pi i p_k x_k}, \qquad p_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{17.1}$$

ეს ფუნქციები ქმნის სრულ ორთონორმირებულ სისტემას $L^2(c_k)$ კლასში. ნებისმიერ x_k -ს მიმართ ინტეგრებად ფუნქციას აქვს ფურიეს მწკრივი. პირიქით, ამ სისტემის გავრცელება (17.1)-ის თვალსაზრისით სრულიად განსაზღვრავს ფუნქციას c_k -ზე.

იმისათვის, რომ (17.1)-დან მივიღოთ სრული ორთოგონალური სისტემა Q_ω-ში განვიხილოთ

$$\prod_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i p_k x_k} = e^{2\pi i (p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots)} . \tag{17.2}$$

ცხადია, რომ ამ უკანასკნელს არ აქვს აზრი, რადგან უსასრულო ნამრავლი, საზოგადოდ, არ არსებობს. მაგრამ თუ ჩვენ ამ ნამრავლებს შევზღუდავთ ისე, რომ განვიხილავთ ნამრავლებს, სადაც მხოლოდ სასრული რაოდენობა p_k რიცხვებისა არის 0-გან განსხვავებული, მაშინ ჩვენ (17.2)-დან მივიღებთ გარკვეულ ფუნქციათა სისტემას Q_ω-ზე. თუ დავწერთ სიდიდეს

$$p = (p_1, p_2, p_3, \ldots) ,$$

და ვიგულისხმებთ, რომ ნულისაგან განსხვავებული კოორდინატები სასრულია, მაშინ აზრი ექნება ჩანაწერს $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots$ (იხ. (17.2)). ასეთ შემთხვევაში კორექტული იქნება ჩანაწერი

$$e^{2\pi i p x} . \tag{17.3}$$

$e^{-2\pi i p x}$-ით ჩვენ აღვნიშნავთ $-p = (-p_1, -p_2, -p_3, \ldots)$-ის შესაბამის რხევას.

ცხადია, (17.3) სისტემა არის ორთონორმირებული სისტემა Q_ω-ში. უფრო მეტიც, ამ სისტემის ფუნქციები ყველა შემოსაზღვრულია 1-ით. ამ აზრით ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერ ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას Q_ω-ზე შევუსაბამოთ (17.3) სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივი

$$f(x) \approx \sum_p c_p e^{2\pi i p x} ,$$

სადაც

$$c_p = \int_{Q_\omega} f(x) e^{-2\pi i p x} d\omega_\omega .$$

როგორც ფურიეს მწკრივთა ტრადიციულ (Q_n სივრცის ფურიეს მწკრივების) თეორიაში, აქაც გვაქვს ძირითადი დებულება.

Q_ω-ზე ინტეგრებადი ფუნქცია ცალსახად არის განსაზღვრული მისი ფურიეს მწკრივით. ანუ თუ ორ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე ფურიეს მწკრივი, მაშინ ისინი არის იდენტური თითქმის ყველგან.

ჩვენ დაგვყავს ეს დებულება შესაბამის დებულებამდე Q_n სივრცეზე განსაზღვრული შემდეგი ფუნქციის გამოყენებით:

$$f_n(x) = \int_{Q_{n,\omega}} f(x) d\omega_{n,\omega} .$$

კერძოდ, თუ $p_{n+1},\ p_{n+2},\dots$ რიცხვებიდან ყველა არის ნული, მაშინ გვექნება

$$\int_{Q_\omega} f_n(x) e^{-2\pi ipx} d\omega_\omega = \int_{Q_n} f(x) e^{-2\pi ipx} d\omega_n \int_{Q_{n,\omega}} f(x) d\omega_{n,\omega} = \int_{Q_\omega} f(x) e^{-2\pi ipx} d\omega_\omega = c_p .$$

თუ რიცხვებიდან $p_{n+1}, p_{n+2},\dots$ ყველა არ არის ნული, მაშინ

$$\int_{Q_\omega} f_n(x) e^{-2\pi ipx} d\omega_\omega = \int_{Q_n} f(x) e^{-2\pi ipx} d\omega_n \int_{Q_{n,\omega}} e^{-2\pi ipx} d\omega_{n,\omega} = 0 .$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია არის ცალსახად განსაზღვრული მისი ფურიეს მწკრივით. უკანასკნელი მარტივად გამომდინარეობს Q_n სივრცისთვის შესაბამისი დებულებიდან. აქედან გამომდინარე, რადგან $f_n(x) \to f(x)$ თითქმის ყველგან, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ, რომ $f(x)$, აგრეთვე, უნდა იყოს ცალსახად განსაზღვრული მისი ფურიეს მწკრივის საშუალებით.

თუ ჩვენ შევზღუდავთ თავს L^2 კლასის $f(x)$ ფუნქციის განხილვით, მაშინ უკვე დამტკიცებულის ძალით მივიღებთ, რომ (17.3) სისტემა არის სრული. მართლაც, ამ შემთხვევაში ჩვენ გამოვიყენებთ პარსევალის ტოლობას

$$\int_{Q_\omega} |f(x)|^2 d\omega_\omega = \sum_p |c_p|^2 .$$

18. Q_ω -ზე განსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციების ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების ჩეზაროს საშუალოების კრებადობის ზოგიერთი თვისება

განვიხილოთ $n=(n_1,n_2,...)$, სადაც $n_k \in Z,\ k=1,2...$. ვთქვათ, f ინტეგრებადი ფუნქციაა $Q_\omega=(\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2,...)$ -ზე, სადაც $c_1,\mathrm{c}_2,...$ არის წრეწირები სიგრძით 1. ვთქვათ, r რაიმე ნატურალური რიცხვია. შევადგინოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის (n,r) რიგის „კერძო ჯამები„ შემდეგნაირად:

$$S_n^r(x,f)\equiv S_{n_1,n_2,...n_r}^{(\mathrm{r})}(x,f)=\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_p=-n_r}^{n_r}C_{k_1,k_2,...k_r,0,...}e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_rx_r)},$$

სადაც

$$C_{k_1,k_2,...k_r,0,...}=\int_{Q_\omega}f(t)e^{-2\pi i(k_1t_1+...+k_rt_r)}dt.$$

გვაქვს

$$S_n^{(\mathrm{r})}(x,f)=\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_r=-n_r}^{n_r}\int_{Q_\omega}f(t)\ e^{-2\pi i(k_1t_1+...+k_rt_r)}e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_rx_r)}dt=$$

$$=\int_{Q_\omega}f(t)\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_r=-n_r}^{n_r}e^{2\pi i(k_1(x_1-t_1)+...+k_r(x_r-t_r))}dt$$

$$=\int_{Q_\omega}f(t)\prod_{k=1}^{r}D_{n_k}^*(x_k-t_k)dt=\int_{Q_\omega}f(x_1+u_1,x_2+u_2,...x_r+u_r,u_{r+1}...)\prod_{k=1}^{r}D_{n_k}^*(u_k)du,$$

სადაც

$$D_{n_k}^*(u_k)=D_{n_k}(2\pi u_k),k=1,2,...,r.$$

ასეთი კერძო ჯამებისათვის შევადგინოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის (n,r) რიგის „კერძო ჯამების„ ფეიერის $(\mathrm{C},1)$ საშუალოები:

$$\sigma_n^{(\mathrm{r})}(x,f)=\sigma_{n_1,n_2,...}^{(\mathrm{r})}(x,f)=\frac{1}{(n_1+1)...(n_1+1)}\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_r=-n_r}^{n_r}S_{k_1,k_2,...k_r}^{(\mathrm{r})}(x,f)=$$

$$=\frac{1}{(n_1+1)...(n_1+1)}\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_r=-n_r}^{n_r}\int_{Q_\omega} f(x_1+u_1,x_2+u_2,...x_r+u_r,u_{r+1}...)\prod_{s=1}^{r}D_{k_s}^{*}(u_s)du=$$

$$=\int_{Q_\omega} f(x_1+u_1,x_2+u_2,...x_r+u_r,u_{r+1}...)\frac{1}{(n_1+1)...(n_1+1)}\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}...\sum_{k_r=-n_r}^{n_p}\prod_{s=1}^{r}D_{k_s}^{*}(u_s)du$$

$$=\int_{Q_\omega} f(x_1+u_1,x_2+u_2,...x_r+u_r,u_{r+1}...)K_{n_1}^{*}(u_1)..K_{n_r}^{*}(u_r)du\,,$$

სადაც

$$K_{n_s}^{*}(u_s)=\frac{1}{n_s+1}\sum_{k_s=0}^{n_s}D_{k_s}^{*}(u_s),\, s=1,2,...,r.$$

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ $S_n^{(r)}(x,f)$ კრებადია სასრული $\varphi(x)$-კენ, როცა $(n,r)\to\infty$, თუ ყოველი $\varepsilon>0$-სთვის არსებობს ნატურალური N რიცხვი ისეთი, რომ როცა $r,n_1,n_2,...,n_r>N$ მაშინ

$$\left|S_n^{(r)}(x,f)-\varphi(x)\right|<\varepsilon\,.$$

ძნელი არ არის იმის წარმოდგენა, თუ როგორ განისაზღვრება $x\in Q_\omega$-ის მიმართ $S_n^{(r)}(x,f)$-ების თანაბარი კრებადობა $\varphi(x)$-კენ. ანალოგიურად განისაზღვრება $\sigma_n^{(r)}(x,f)$-ების კრებადობა და თანაბარი კრებადობა $\varphi(x)$-კენ.

თეორემა 18.1. თუ f უწყვეტია Q_ω-ზე, მაშინ $\sigma_n^{(r)}(x,f)$ თანაბრად კრებადია f-კენ.

დამტკიცება: რადგან ფუნქცია უწყვეტია Q_ω-ზე, ამიტომ ის თანაბრად უწყვეტია (იხ. [8] გვ 257 გვ) შემდეგი აზრით: ყოველი $\varepsilon>0$-სთვის არსებობს ნატურალური q რიცხვი და δ ($\delta>0$) რიცხვი ისეთი, რომ

$$\left|f(x_1,x_2,x_3,...)-f(x_1',x_2,x_3',...)\right|<\varepsilon\,,$$

როცა $\left|x_k-x_k'\right|<\delta$, $1\le k\le q$.

განვიხილოთ

$$\sigma_n^{(r)}(x,f)-f(x)=\int_{Q_\omega}\left[f(x_1+u_1,...x_r+u_r,u_{r+1}...)-f(x_1,x_2,...x_r,x_{r+1}...)\right]\prod_{s=1}^{r}K_{n_s}^{*}(u_s)du\,.$$

$I^\tau(\delta)$ -ით აღვნიშნოთ ისეთი ინტერვალი Q_ω -ში, რომლის პირველი τ კომპონენტი შეადგენს სეგმენტს ბოლოებით$\left[-\delta,\delta\right]$, ხოლო დანარჩენები ემთხვევა სრულ წრეწირებს. ვთქვათ, $r\geq\tau$. გვაქვს

$$\sigma_n^{(r)}(x,f)-f(x)=\left\{\int_{I^\tau(\delta)}+\int_{CI^\tau(\delta)}\right\}\int_{Q_\omega}\left[f(x_1+u_1,...x_r+u_r,u_{r+1}...)-f(x_1,x_2,...x_r,x_{r+1}...)\right]\prod_{s=1}^{r}K_{n_s}^{*}(u_s)du=:L_1+L_2$$

ამის გარდა

$$\left|L_1\right|\leq\int_{I^\tau(\delta)}\left|f(x_1+u_1,...x_r+u_r,u_{r+1}...)-f(x_1,x_2,...x_r,x_{r+1}...)\right|\prod_{s=1}^{r}K_{n_s}^{*}(u_s)du\leq$$

$$\leq\varepsilon\int_{I^\tau(\delta)}\prod_{s=1}^{r}K_{k_s}^{*}(u_s)du\leq\varepsilon\int_{Q_\omega}\prod_{s=1}^{r}K_{k_s}^{*}(u_s)du=\varepsilon\int_{Q_r}\prod_{s=1}^{r}K_{k_s}^{*}(u_s)du_1+..du_r\int_{Q_{r,\omega}}du_{r,\omega}=\varepsilon\,.$$

f ფუნქცია, მისი Q_ω -ზე უწყვეტობის გამო, არის შემოსაზღვრული. ვთქვათ $\left|f(x)\right|\leq M(\forall x\in Q_\omega)$. მაშინ

$$\left|L_2\right|\leq 2M\int_{CI^\tau(\delta)}K_{n_s}^{*}(u_s)du$$

უკანასკნელ ინტეგრალში საინტეგრაციო არე შეიძლება დავანაწილოთ m რაოდენობა ქვეინტერვალებად, რომელთაგან თითოეულზე ერთი u_s $\left(s=\overline{1,\mathrm{m}}\right)$ მაინც აკმაყოფილებს პირობას $\delta\leq u_s\leq 1-\delta$. ამიტომ შესაბამისი $K_{n_s}^{*}(u_s)$ გულები კრებადია u_s -ის მიმართ თანაბრად როცა $n_s\to\infty$, $\left(s=\overline{1,\mathrm{m}}\right)$. ამის გარდა, დარჩენილი K -დან ინტეგრალი Q_ω -ზე იქნება 1-ის ტოლი.

თუ გავაანალიზებთ რა თეორემა 18.1-ის დამტკიცებას ადვილად დავასკვნით შემდეგი დებულების სამართლიანობას.

თეორემა 18.2. თუ f შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა Q_ω -ზე და უწყვეტია $x^{(0)}$-ზე, მაშინ $\sigma_n^{(r)}\left(x^{(0)}, f\right)$ კრებადია $f\left(x_0\right)$-კენ.

აღსანიშნავია, რომ მოთხოვნა f ფუნქციის შემოსაზღვრულობის შესახებ არის არსებითი.

ვთქვათ $\vec{\alpha}=\left(\alpha_1,\alpha_2,...\right)$, სადაც $\alpha_k>-1$ $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$. განვსაზღვროთ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის (n,r) რიგის „კერძო ჯამების„ ფეიერის $\left(C,\vec{\alpha}\right)$ საშუალოები:

$$\sigma_n^{(\vec{\alpha},p)}\left(x,f\right)=\frac{1}{\prod\limits_{s=1}^{r}A_{n_s}^{\alpha_s}}\sum_{k_r=0}^{n_r}\prod_{s=1}^{r}A_{n_s-k_s}^{\alpha_s-1}S_{k_1,k_2...k_r}^{(r)}(x,f)$$

ისევე როგორც ზემოთ აქაც მივიღებთ, რომ

$$\sigma_n^{(\vec{\alpha},r)}\left(x,f\right)=\int\limits_{Q_\omega}f\left(x_1+u_1,...,x_r+u_r,u_{r+1},...\right)K_{n_1}^{\alpha_1^*}\left(u_1\right)...K_{n_r}^{\alpha_r^*}\left(u_r\right)du,$$

სადაც

$$K_{n_s}^{\alpha_s^*}\left(u_s\right)=\frac{1}{A_{n_s}^{\alpha_s}}\sum_{k_s=0}^{n_s}A_{n_s-k_s}^{\alpha_s-1}D_{k_s}^*\left(u_s\right),\ s=1,2,...,r.$$

დადებითი α რიცხვისათვის დავუშვათ

$$\sup_n\int_0^1\left|K_n^{\alpha^*}\left(u\right)\right|du=:M\left(\alpha\right).$$

როგორც ცნობილია (იხ. მაგალითად, A. Zygmund [21]) $M\left(\alpha\right)$ სასრული რიცხვია.

თეორემა 18.3. ვთქვათ, f უწყვეტი ფუნქციაა Q_ω -ზე და $\overline{\alpha}>0$ $\left(\alpha_i>0,i=\overline{1,\infty}\right)$. მაშინ თანაბრად $x\in Q_\omega$-ს მიმართ $\frac{1}{M\left(\alpha_1\right)...M\left(\alpha_r\right)}\left[\sigma_n^{(\alpha,r)}\left(x,f\right)-f\left(x\right)\right]\to 0$ როცა $\left(n,p\right)\to\infty$.

დამტკიცება: ვთქვათ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ -სთვის მოძებნილია δ და τ ისე, როგორც ეს გავაკეთეთ თეორემა 18.1-ის დამტკიცებისას. გვაქვს

$$\sigma_n^{(\bar{\alpha},r)}(x,f)-f(x)=\left\{\int\limits_{I^\tau(\delta)}+\int\limits_{CI^\tau(\delta)}\right\}\int\limits_{Q_\omega}[f(x_1+u_1,\dots x_r+u_r,u_{r+1}\dots)-f(x_1,x_2,\dots x_r,x_{r+1}\dots)]\prod_{s=1}^{r}K_{n_s}^{*}(u_s)du=:L_1+L_2$$

დავუშვათ, რომ $r\ge\tau$. მაშინ გვექნება:

$$|L_1|\le\varepsilon\int\limits_{I^\tau(\delta)}\left|\prod_{s=1}^{r}K_{n_s}^{\alpha_s^*}(u_s)\right|du\le\varepsilon\int\limits_{Q_\omega}\prod_{s=1}^{r}\left|K_{n_s}^{\alpha_s^*}(u_s)\right|du\le\varepsilon\prod_{1}^{r}M\left(\alpha_i\right)$$

და

$$|L_2|\le 2M\int\limits_{CI^\tau(\delta)}\prod_{s=1}^{r}\left|K_{n_s}^{\alpha_s^*}(u_s)\right|du\le M\left(\alpha_{\tau+1}\right)\dots M\left(\alpha_r\right)2M\int\limits_{CI^\tau(\delta)}\prod_{s=1}^{r}\left|K_{n_s}^{\alpha_s^*}(u_s)\right|du\,.$$

შემდეგ ვიმსჯელებთ ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ თეორემა 18.1-ის დამტკიცების მეორე ნაწილში.

შედეგი 1. თუ $\vec{\alpha}\ge\vec{1}=(1,1,\dots)$ (ანუ თუ $\left(\alpha_i\ge 1,\ i=\overline{1,\infty}\right)$), მაშინ $\sigma_n^{(\bar{\alpha},r)}(x,f)$ თანაბრად კრებადია f -კენ.

მართლაც, რადგან $\vec{\alpha}\ge\vec{1}=(1,1,\dots)$, და

$$K_{n_i}^{\alpha_s^*}(u_s)=\sum_{\nu=0}^{n_i}A_{n_i-\nu}^{\alpha_i-2}A_{n_i}^{\alpha_i}K_{\nu}^{\alpha_i}\left(x\right)/A_{n_i}^{\alpha_i}\ge 0\,,$$

ამიტომ $M\left(\alpha_i\right)=1$.

გავაანალიზებთ რა 18.2 თეორემის დამტკიცებას, დავასკვნით, რომ სამართლიანია

თეორემა 18.4. ვთქვათ, $\vec{\alpha}>0$ და f შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა Q_ω -ზე, ამის გარდა ვიგულისხმოთ რომ f უწყვეტია $x^{(0)}$ წერტილზე, მაშინ

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}M\left(\alpha_i\right)}\left[\sigma_n^{(\alpha,r)}\left(x^{(0)},f\right)-f\left(x\right)\right]\to 0$$

როცა $\left(n,r\right)\to\infty$.

18.1-18.4 თეორემები განხილულია თ. ახობაძის შრომიდან, რომელთა შესახებ ინფორმაცია მოწოდებულია მისსავე სტატიაში [22].

19. გამოყენებული ლიტერატურა

1. H. Bohr-B. Jessen. Om Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver, Danske Vid. Selsk. Skrifter (8) XII 3 (1929), 1-82.
2. H. Bohr-B. Jessen. Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion I, II, Acta math. 54 (1930), 1-35; 58 (1932), 1-55.
3. F. Carlson. Contributions à la théorie des sgries de Dirichlet. Note III, Arkiv för Mat. *23 A,* N:o 19 (1933), 1-8.
4. P. J. Daniell. A general form of integral, Ann. of Math. (2) 19 (1918), 279-294.
5. P. J. Daniell. Integrals in an infinite number of dimensions, Ann. of Math. (2)20 (1919), 281-288.
6. Feller-E. Tornier. Mass- und lnhaltstheorie des Bairesehen Nullraumes, Math. Ann. 107 (1932), 165-187.
7. G. H. Hardy-d. E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta math. 54 (1930), 81)-116.
8. B. Jessen. The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, Acta Mathematica, 63, 1934, 249-323.
9. Kolmogoroff. Über die Summen dutch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann. 99 (1928), 309--319; 102 (1930), 484-488.
10. Kolmogoroff. Grundbegriffe tier Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik 2, Heft 3 (Berlin 1933), 1-62.
11. Lebesgue. Sur l'intégration des fonctions discontinues, Ann. École norm. (3) *27* (1910), 361-450.
12. R. E. A. C. Paley-A. Zygmund. On some series of functions (1), (2), (3), Proc. Cambridge Philos. Soc. 26 (1930), 337-357; 458-474; 28 (I932), 190-205.
13. R. E. A. C. Paley. Wiener-A. Zygmund. Notes on random functions, Math.Zeitschr. 37 (1933), 647-668.
14. F. Riesz. Über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910), 449-497.
15. F. Riesz. Sur une inégalité intégrale, Journ. London Math. Soc. 5 (1930), 162-168.
16. F. Riesz. Sur un théoréme de maximum de MM. Hardy et Littlewood, Journ. London Math. Soc. 7 (I932), 10-1 3.
17. H. Steinhaus. Sur la probabilité de la convergence de series I, Studia math. 2 (1930), 21-39.

18. H. Steinhaus. Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass det Konvergenzkreis einer Potenzreiheihre natürliche Grenze ist, Math. Zeitschr. 31 (1930), 408-416.
19. C. de la Vallée-Poussin. Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 35 (1911), 189—190.
20. N. Wiener. The mean of a functional of arbitrary elements, Ann. of Math. (2)22 (I92I), 66-72.
21. A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge Mathematical Library, (2002).
22. Т. Ахобадзе, О счотно-кратных рядах фурье, Сообщ. АН ССР, 3(122), 1986, 489-492.
23. Коноплев Б.О. сходимости Бесконечных родов.-Коф. "Теорет. и прикл. выросы матем." (Тарту,11-12 сент.1980)Тез. докл.-Тарту,1980.
24. Коноплев Б.В. О суммируемости почти всюду кратных ортогональных рядов.-Всесоюз.симп. по теории аппрокс. функций (Уфа, май 1980); Тез.докл.,1980, 72-73.
25. Коноплев Б.В. Некоторые вопросы сходимости почти всюду кратных ортогональных родов.-Саратов 1979, 29с-Руколись представлена Саратовским ун-том. Ден. Винити, 20 дек. 1979г. №4314-79.