ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დავითი ლაშხია

არსებითად არაწრფივი ფუნქციონალურ-დიფერენციალურ განტოლებათა ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

წმინდა მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი 2019

სარჩევი

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია მაღალი რიგის შემდეგი სახის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0$$

ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა, სადაც $F \in V(\tau)$. $V(\tau)$ - თი აღნიშნულია იმ უწყვეტ $F: C\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R})$ ასახვათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$F(x)(t) = F(y)(t), \quad \text{ნებისმიერი } t \in \mathbb{R}_+ \text{ და } x, y \in C\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}),$$

როცა $x(s) = y(s)$, $s \geq \tau(t)$.

ზემოთ მოყვანილი დეფერენციალური განტოლებისათვის დადგენილია შემოუსაზღვრელი, ქრობადი და რხევადი ამონასნების არსებობის საკმარისი პირობები.

summary

in this paper is studied the asymptotic behavior of high order functional differential-equations.

equation is as follows

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0$$

where $F \in V(\tau)$. $V(\tau) -$ is noted by the continuous $F: C\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R})$ a set of mapping , which satisfy the condition

$$F(x)(t) = F(y)(t) \quad \text{any } t \in \mathbb{R}_+ \text{ and } x, y \in C\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}),$$

When $x(s) = y(s)$, $s \geq \tau(t)$

The existence unbounded, vanish and oscillatory of solutions are established.

1. შესავალი

ვთქვათ $\tau \in C\,(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ და $\lim\limits_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$. $V(\tau)$ -თი აღვნიშნოთ $F{:}\, C(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}) \to L_{loc}\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R})$ უწყვეტ ასახვათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $F(x)(t) = F(y)(t)$ ნებისმიერი $t \in \mathbb{R}_+$ და $x, y \in C\,(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R})$, როცა $s \geq \tau(t)$, $x(s) = y(s)$.

წინამდებარე ნაშრომი ეძღვნება

$$u^{(n)}(t) + F(u)(t) = 0 \tag{1.1}$$

სახის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების ამონახსნების ოსცილაციური თვისებების შესწავლას, სადაც $n \geq 2$ და $F \in V(\tau)$.

ვთქვათ $t_0 \in \mathbb{R}_+$. $H_{t_0,\tau}$ -ით აღვნიშნოთ ისეთი $u \in C\,(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $u(t) \neq 0$, როცა $t \geq t_*$, სადაც $t_* = \min\{t_0, \tau_*(t_0)\}$, $\tau_*(t) = \inf\,(\tau(s){:}\ s \geq t\}$.

ქვემოთ ყველგან იგულისხმება, რომ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_+$- თვის სრულდება ერთერთი შემდეგი ორი პირობიდან :

$$F(u)(t)\,u(t) \;\geq\; 0\,,\ \text{როცა}\ t \geq t_0\,,\ \ u \in H_{t_0,\tau} \tag{1.2}$$

ან

$$F(u)(t)\,u(t) \;\leq\; 0\,,\ \text{როცა}\ t \geq t_0\,,\ \ u \in H_{t_0,\tau} \tag{1.3}$$

ვთქვათ $t_0 \in \mathbb{R}_+$. $u: [t_0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი, თუ იგი ლოკალურად აბსოლუტურად უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად $n-1$ რიგამდე ჩათვლით, არსებობს $\bar{u} \in C\,(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ ისეთი, რომ $\bar{u}\,(t) \equiv u(t)$, როცა $[t_0, +\infty[$ და სრულდება $\bar{u}^{(n)}(t) + F\,(\bar{u}\,(t)) = 0$ ყველგან $t \in [t_0, +\infty[$ შუალედში და

$$\sup\{\,|u(s)| : s \in [t, +\infty[\,\} > 0\,,\ \text{ნებისმიერი}\ t \geq t_0\ \text{- თვის}\,.$$

$u: [t_0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ (1.1) განტოლების წესიერ ამონახსნს ეწოდება რხევადი, თუ მას გააჩნია ნულების მიმდევრობა კრებადი $+\infty$ -კენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ეწოდება არარხევადი.

<u>განსაზღვრება 1.1</u> ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n -ის შემთხვევაში რხევადია, ხოლო კენტი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს პირობას:

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0, \text{ როცა } t \uparrow +\infty \qquad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{1.4}$$

<u>განსაზღვრება 1.2</u> ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{B}$ თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n -ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს (1.4) პირობას ან

$$|u^{(i)}(t)| \uparrow +\infty, \text{ როცა } t \uparrow +\infty \qquad (i = 0, \ldots, n-1). \tag{1.5}$$

2. ზოგიერთი დამხმარე ლემა

ლემა 2.1 ვთქვათ $u \in \tilde{C}_{loc}^{n-1}([\,t_0; +\infty); \mathbb{R})$ და $u\,(t) > 0$, $u^{(n)}(t) \le 0$, $(u^{(n)}(t) \ge 0)$, როცა $t \ge t_0$ (2.1)

მაშინ არსებობს $t_1 \in [t_0\,; +\infty)$ და $\ell \in \{0, \dots, n\}$ რიცხვები, ისეთი რომ $\ell + n$ კენტია (ლუწია) და $u^{(i)}\,(t) > 0$, როცა $t \ge t_0$ (i=0, … , ℓ-1), $(-1)^{i+\ell}\,u^{(i)}(t) \ge 0$, როცა $t \ge t_0$ (i=ℓ, … ,n).

***დამტკიცება*.** განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სრულდება პირობა

$$u^{(n)}(t) \le 0 \text{ და } u\,(t) > 0\,,\text{ როცა } t \ge t_0 \tag{2.1'}$$

(ანალოგიურად მტკიცდება, როცა $u^{(n)}\,(t) \ge 0,\ u\,(t) > 0\,,\ t \ge t_0$) . (2.1’) - ის თანახმად მოიძებნა $t_1 > t_0$ ისეთი, რომ

$$1)\ u^{(n-1)}(t) < 0 \text{ ან } 2)\ u^{(n-1)}(t) > 0,\text{ როცა } t \ge t_1 \tag{2.2}$$

ვაჩვენოთ, რომ სრულდება 2)–ე პირობა. დავუშვათ, რომ სრულდება 1) პირობა, მაშინ (2.1’) -ის და (2.2) -ის პირველი პირობის თანახმად ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$u^{(n-2)}(t) = u^{(n-2)}(t_1) + \int_{t_1}^{t} u^{(n-1)}(s)ds \le u^{(n-2)}(\,t_1) + u^{(n-1)}\,(t_1)\,(\,t\text{-}t_1) \to -\infty$$

$$u^{(n-2)}(t) \le u^{(n-2)}(\,t_1) + u^{(n-1)}\,(t_1)\,(\,t\text{-}t_1) \to -\infty,$$

როცა $t \to +\infty$, მაშასადამე გარკვეული ადგილიდან დაწყებული $u^{(n-2)}(t) < 0.$ თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ, რომ $u(t) \to -\infty$, როცა $t \to +\infty$ რაც ეწინააღმდეგება პირობას $u(t) > 0$, როცა $t \ge t_0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $u^{(n-1)}(t) > 0$, როცა $t > t_1$. ამიტომ მოძებნება $t_2 > t_1$ ისეთი ,რომ

1) $u^{(n-2)}(t) > 0$, როცა $t \ge t_2$ ან 2) $u^{(n-2)}(t) < 0$, როცა $t \ge t_2$.

ვთქვათ სრულდება 1) პირობა , მაშინ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ არსებობს $t_3 > t_2$ ისეთი, რომ $u^{(i)}\,(t) > 0$, როცა $t \ge t_3$(i = 0,… ,n-2) ამ შემთხვევაში $\ell = n - 1$ და ლემა დამტკიცებულია. ახლა დავუშვათ არ სრულდება 1) შემთხვევა და სრულდება $u^{(n-2)}(t) < 0$, მაშინ თუ გავაგრძელებთ ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას ანალოგიურად ვაჩვენებთ ისეთი ℓ -ის არსებობას, რომ $\ell + n$ კენტია და საკმარისად დიდი t – ებისათვის სრულდება უტოლობები

$$u^{(i)}(t) > 0 \quad (i = 0, \dots, \ell), \quad (-1)^{i+\ell}u^{(i)}\,(t) \ge 0 \quad (i = \ell, \dots ,n\text{ -}1)$$

რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას .

ლემა 2.2 ვთქვათ $u \in \hat{C}^{n-1}_{loc}([t_0;+\infty);\mathbb{R})$ და $(-1)^i u^{(i)}(t) > 0$

$(i = 0, \dots, n-1)$,

$$(-1)^n u^{(n)}(t) \geq 0, \text{ როცა } t \geq t_0, \tag{2.3}$$

მაშინ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-1} |u^{(n)}(t)|\, dt < +\infty \tag{2.4}$$

$$|u^{(i)}(t)| \geq \frac{1}{(n-i-1)!} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-i-1} |u^{(n)}(s)| ds, \text{ როცა } t \geq t_0 \ (i = 0, \dots, n-1) \tag{2.5}$$

და

$$u(t) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|u^{(i)}(s)|\,(s-t)^i}{i!}, \text{ როცა } s \geq t \geq t_0. \tag{2.6}$$

დამტკიცება. ტოლობიდან

$$u^{(i)}(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{u^{(j)}(s)}{(j-i)!} (t-s)^{j-i} + \frac{1}{(k-i-1)!} \int_s^t (t-\xi)^{k-i-1} u^{(k)}(\xi)\, d\xi \tag{2.7}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.1) პირობებს $i = 0$, $k = n$, როცა $s \geq t$ (2.7) დან გვექნება

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{(j)}(s)}{j!} (t-s)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_s^t (t-\xi)^{n-1} u^{(n)}(\xi)\, d\xi =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{u^{(j)}(s)}{j!} (s-t)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s (-1)^n (\xi-t)^{n-1} u^{(n)}(\xi)\, d\xi =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{u^{(j)}(s)}{j!} (s-t)^j + \frac{1}{(n-1)!} + \int_t^s (\xi-t)^{n-1} |u^{(n)}(\xi)|\, d\xi \tag{2.8}$$

რადგან,

$$(-1)^j u^{(j)}(s) > 0 \quad (j=0,\dots,n-1) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j u^{(j)}(s)}{j!} (s-t)^j > 0,$$

ამიტომ (2.8) დან მივიღებთ თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $s \to +\infty$ მივიღებთ

$u(t) \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s (\xi - t)^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| \, d\xi$.

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე , როცა $s \to +\infty$ მივიღებთ

$$u(t) \geq \frac{1}{(n-1)!} \int_t^{+\infty} (\xi - t)^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| \, d\xi = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^{+\infty} \xi^{n-1} \left(1 - \frac{t}{\xi}\right)^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| d\xi$$

$$\geq \frac{1}{(n-1)!} \int_{2t}^{+\infty} \xi^{n-1} \left(1 - \frac{t}{\xi}\right)^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| \, d\xi \geq \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2t}^{+\infty} \xi^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| d\xi$$

მაშასადამე

$$\int_t^{+\infty} \xi^{n-1} |u^{(n)}(\xi)| \, d\xi < +\infty ,$$

რაც ამტკიცებს (2.4) - ის სამართლიანობას.

ტოლობიდან

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j \, | \, u^{(j)}(s)|}{j!} (s-t)^j + \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s (-1)^n \, (\xi - t)^{n-1} \, | \, u^{(n)}(\xi)| \, d\xi$$

გვაქვს

$$u(t) \geq \sum_{i=o}^{n-1} \frac{|u^{(i)}(s)|(s-t)^i}{i!} \quad , \text{ როცა } \; s \geq t \geq t_0 .$$

(2.5) ფორმულაში $k = n$ შემთხვევაში გვექნება

$$u^{(i)}(t) = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{u^{(j)}(s)}{(j-i)!} (t-s)^{j-i} + \frac{1}{(n-i-1)!} \int_s^t (t-\xi)^{n-i-1} u^{(k)}(\xi) d\xi$$

$$(-1) u^{(i)}(t) = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(-1)^{j-i} \, u^{(j)}(s)}{(j-i)!} (s-t)^{j-i} + \frac{1}{(n-i-1)!} \int_t^s (t-\xi)^{n-i-1} u^{(n)}(\xi) d\xi$$

როცა $s \to \infty$, გვექნება

$$|u^{(i)}(t)| \geq \frac{1}{(n-i-1)!} \int_t^{+\infty} (s-t)^{n-i-1} \, |u^{(n)}(s)| ds.$$

<u>**ლემა 2.3**</u> თუ $u \in \hat{C}_{loc}^{n-1}([\, t_0; +\infty))$ და $u^{(i)}(t) > 0$, როცა $t \geq t_0$

$(i = 0, \ldots, \ell\text{-}1)$,

$(-1)^{i+\ell} u^{(i)}(t) \geq 0$, როცა $t \geq t_0$ $(i = \ell, \ldots, n)$ (2.7)

სრულდება რომელიმე $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ – თვის , მაშინ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-\ell-1}\, |u^{(n)}(t)|\, dt < +\infty \tag{2.8}$$

$$u^{(i)}(t) \geq u^{(i)}(t_0) + \frac{1}{(\ell-i-1)!(n-\ell-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-\xi)^{\ell-i-1} \times \int_{\xi}^{+\infty} (s-\xi)^{n-\ell-1} |u^{(n)}(s)| ds\, d\xi$$

როცა $t \geq t_0$ $(i = 0,\dots, \ell\text{-}1)$ (2.9)

$$| u^{(i)}(t) | \geq \frac{1}{(n-i-1)!} \int_{t}^{+\infty} (s-t)^{n-i-1}\, | u^{(n)}(s) |ds$$, როცა $t \geq t_0$ $(i = \ell,\dots,n\text{-}1)$

. (2.10)

გარდა ამისა , თუ

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{n-\ell} | u^{(n)}(t) |dt = +\infty , \tag{2.11}$$

მაშინ

$$\frac{u(t)}{t^{\ell}}\downarrow, \quad \frac{u(t)}{t^{\ell-1}}\uparrow \ +\infty , \text{ როცა } t\uparrow +\infty \quad u(t) \geq \frac{t^{\ell-1}}{\ell\,!} u^{(\ell-1)}(t) \ , \ t \geq t_* \tag{2.12}$$

$$u(t) \geq \frac{t^{\ell}}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t}^{+\infty} s^{n-\ell-1}\, |u^{(n)}(s)|\, ds \tag{2.13}$$

როცა t და $\beta \in C(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$, ნებისმიერი არაკლებადი ფუნქციაა, აკმაყოფილებს

$$\beta(t) < t , \quad t \in \mathbb{R}_+ , \ \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = +\infty \tag{2.14}$$

პირობას, როცა $t_* \in [\, t_0 \,;\, +\infty)$,

მაშინ

$$u(\beta(t)) \geq \frac{\beta^{\ell-1}(t)}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_*}^{t} \beta^{n-\ell}(s)\, |u^{(n)}(s)|\, ds \ , \text{ როცა } t \geq t_*. \tag{2.15}$$

დამტკიცება. სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j\, t^{j-i}\, u^{(j)}(t)}{(j-i)!} = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j\, t_0^{\,j-i}\, u^{(j)}(t_0)}{(j-i)!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-i-1)!} \int_{t_0}^{t} s^{k-i-1}\, u^{(k)}(s)\, |ds$$

(2.16)

მართლაც აღვნიშნოთ

$u(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} \ u^{(j)}(t)}{(j-i)!}$ $\quad v(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j {t_0}^{j-i} \ u^{(j)}(t_0)}{(j-i)!}$ +

$\frac{(-1)^{k+1}}{(k-i-1)!} \int_{T_0}^{t} s^{k-i-1} \ u^{(k)}(s)ds$, ცხადია, რომ $u(t_0) = v(t_0)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $u'(t) = v'(t)$

$$u'(t) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(j-i)!} (t^{j-i} u^{(j)}(t))' = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(j-i)!} ((t^{j-i})' u^{(j)}(t) + t^{j-i}(u^{(j)})')$$

$$= \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j}{(j-i)!} ((j-i) t^{j-i-1} u^{(j)}(t) + t^{j-i} u^{(j+1)}) = \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} \ u^{(j)}(t)}{(j-i-1)!} +$$

$$\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} \ u^{(j+1)}(t)}{(j-i)!} = \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} \ u^{(j)}(t)}{(j-i-1)!} + \sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i} \ u^{(j+1)}(t)}{(j-i)!}$$

ჯამში

$$\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} \ u^{(j+i)}(t)}{(j-i)!}$$

მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნა $r = j+1$, მაშინ

$$\sum_{j=i}^{k-1} \frac{(-1)^j t^{j-i-1} \ u^{(j)}(t)}{(j-i)!} = \sum_{r=i+1}^{k} \frac{(-1)^{r-1} t^{r-i-1} \ u^{(r)}(t)}{(r-i-1)!} =$$

$$= - \sum_{r=i+1}^{k-1} \frac{(-1)^r t^{r-i-1} \ u^{(r)}(t)}{(r-i-1)!} + \frac{(-1)^{k-1} t^{k-i-1} \ u^{(k)}(t)}{(k-i-1)!}$$

$v'(t) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-i-1)!} \ t^{k-i-1} u^{(k)}(t)$ ე.ი $u'(t) = v'(t)$

მაშასადამე სამართლიანია (2.16) ტოლობა.

(2.16) ფორმულაში, როცა $i = \ell$, $k = n$ გვექნება

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{(-1)^j t^{j-\ell} u^{(j)}(t)}{(j-\ell)!} = \sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{(-1)^j {t_0}^{j-\ell} u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-\ell-1)!} \int_{t_0}^{t} s^{n-i-1} u^{(n)}(s) \, ds$$

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{t^{j-\ell}\,|u^{(j)}(t)|}{j-\ell} = \sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{(-1)^j\, t_0^{\,j-\ell}\, u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-\ell-1)!}\int_t^{t_0} s^{n-\ell-1}\,|u^{(n)}(s)|\,ds$$

თუ გადავალთ ზღვარზე , როცა $t_0 \to +\infty$, მაშინ გვექნება

$$\sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{t^{j-\ell}\,|u^{(j)}(t)|}{(j-\ell)!} \geq \frac{1}{(n-\ell-1)!}\int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1}\,|u^{(n)}(s)|\,ds, \text{ როცა } t \geq t_0$$

(2.4) ფორმულის სამართლიანობა უკვე ნაჩვენები გვაქვს . გავითვალისწინოთ $k=\ell$,როცა $s = t_0$ გვექნება

$$u^{(i)}(t) = \sum_{j=i}^{\ell-1} \frac{u^{j}(t_0)}{(j-i)!}(t - t_0)^{j-i} + \frac{1}{(\ell-i-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-\xi)^{\ell-i-1}\, u^{(\ell)}(\xi)\,d\xi$$

$$u^{(i)}(t) \geq u^{(i)}(t_0) + \frac{1}{(\ell-i-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-\xi)^{\ell-i-1}\, u^{(\ell)}(\xi)\,d\xi$$

გავითვალისწინოთ

$$|u^{(i)}(t)| \geq \frac{1}{(n-i-1)!}\int_t^{+\infty} (s-t)^{n-i-1}\,|u^{(n)}(s)|\,ds , \; t \geq t_0$$

მაშინ ამ უტოლობიდან გვექნება (2.5) უტოლობა. დავუშვათ სრულდება პირობა

$$\int_t^{+\infty} t^{n-\ell}\,|u^{(n)}(t)|\,dt = +\infty$$

მაშინ (1.6) ში თუ გავითვალისწინებთ $k = n$ და $i = \ell - 1$

$$\sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^j\, t^{j-\ell+1}\, u^{(j)}(t)}{(j-\ell+1)!} = \sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^j\, t_0^{\,j-\ell+1}\, u^{(j)}(t_0)}{(j-i)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-\ell)!}\int_{t_0}^{t} s^{n-\ell}\, u^{(n)}(s)ds$$

ეს ტოლობა გავამრავლოთ $(-1)^{\ell-1}$ გვექნება

$$\sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t^{j-\ell+1}\, u^{(j)}(t)}{(j-\ell+1)!} = \sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell+1)!} + \frac{(-1)^{\ell+n}}{(n-\ell)!}\int_{t_0}^{t} s^{n-\ell}\, u^{(n)}(s)ds \tag{2.17}$$

პირობების გათვალისწინებით

$$u^{(i)}(t) > 0\,,\ \ t \geq t_0 \quad (i = 0 , \dots ,\ell -1)$$

$(-1)^{i+\ell}\, u^{(i)}(t) > 0$, როცა $t \geq t_0$ ($i = \ell, \dots , n)$

$j = \ell -1$ თვის გვექნება

$$u^{(\ell-1)}(t) - t\, u^{(\ell)}(t) =\sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, {t_0}^{j-\ell+1}\ u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell+1)\,!} + \frac{(-1)^{\ell+n}}{(n-\ell)\,!} \int_{t_0}^{t} s^{n-\ell}\, u^{(n)}(s)ds$$

$$-\sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t^{j-\ell+1}\ u^{(j)}(t)}{(j-\ell+1)\,!} = \sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t_0^{\ j-\ell+1}\ u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell+1)\,!} + \frac{1}{(n-\ell)\,!}\int_{t_0}^{t} s^{n-\ell} |u^{(n)}(s)|ds$$

$$-\ \sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t^{j-\ell+1}\ u^{(j)}(t)}{(j-\ell+1)\,!}$$

რადგან

$$\sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t^{j-\ell+1}\ u^{(j)}(t)}{(j-\ell+1)\,!} = \sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{t^{j-\ell+1}\ | u^{(j)}(t) |}{(j-\ell+1)\,!}$$

$$u^{(\ell-1)}(t) - tu^{(\ell)}(t) = \sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, {t_0}^{j-\ell+1}\ u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell+1)\,!} + \frac{1}{(n-\ell)\,!}\int_{t_0}^{t} s^{n-\ell}|u^{(n)}(s)|ds +$$

$$\sum_{j=\ell+1}^{n-1} \frac{t^{j-\ell+1}\ | u^{(j)}(t) |}{(j-\ell+1)\,!}$$

შევარჩიოთ $t_1 > t_0$ ისეთი, რომ

$$\sum_{j=\ell-1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+\ell-1}\, t_0^{\ j-\ell+1}\ u^{(j)}(t_0)}{(j-\ell+1)\,!} + \frac{1}{(n-\ell)\,!}\int_{t_0}^{t_1} s^{n-\ell}\, |u^{(n)}(s)|\, ds >0$$

ამიტომ გვაქვს

$u^{(\ell-1)}(t) \geq \sum_{j=\ell}^{n-1} \frac{t^{j-\ell+1}\ | u^{(j)}(t) |}{(j-\ell+1)\,!}$, როცა $t > t_1$.

პირობის ძალით

$$\lim_{t\to+\infty} \left(u^{(\ell-1)}(t) - t\,u^{(\ell)}(t)\right) \to +\infty$$

და ლოპიტალის წესის თანახმად $i = 2$ თვის გვექნება

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u^{(\ell-2)}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} u^{(\ell-1)}(t) = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{t^{\ell-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{u'(t)}{(\ell-1)\,t^{\ell-2}} = \infty$$

$$\left(\frac{u^{(\ell-i)}}{t^{i-1}}\right)' = \frac{u^{(\ell-i+1)}(t)\,t^{i-1} - u^{(\ell-i)}(t)\,(\ell-i)t^{i-2}}{t^{2\,(i-1)}} = \frac{t^{(\ell-2)}\left(t\,u^{(\ell-i+1)}(t) - u^{(\ell-i)}(t)\,(\ell-i)\right)}{t^{2\,(i-1)}}$$

არსებობს t_i წერტილები, რომ

$\left(t\,u^{(\ell-i+1)} - u^{(\ell-i)}(t)\,(\ell-i)\right) > 0$ ნებისმიერი $t \geq t_0$, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$-თვის.

აღვნიშნოთ

$$\rho_i(t) = i u^{(\ell-1)}(t) - t u^{(\ell-i+1)}(t)$$

$$r_i(t) = t u^{(\ell-i+1)}(t) - (i-1)\, u^{(\ell-1)}(t)$$

$$\left(\frac{u(t)}{t^{\ell}}\right)' = \frac{u'(t)t^{\ell} - (\ell)t^{\ell-1}u(t)}{t^{2\ell}} = \frac{t^{\ell-1}\left(u'(t)t - \ell u(t)\right)}{t^{2\ell}} \downarrow$$

$$\left(\frac{u(t)}{t^{\ell-1}}\right)' = \frac{u'(t)t^{\ell-1} - (\ell-1)t^{\ell-2}u(t)}{t^{2(\ell-1)}} = \frac{t^{\ell-2}\left(t\,u'(t) - (\ell-1)u(t)\right)}{t^{2(\ell-1)}} \uparrow$$

$$r_{\ell}(t) = t u'(t) - (\ell-1)u(t) > 0 \uparrow +\infty.$$

3. დადებითი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობა

მოცემულ პარაგრაფში მიღებულ შედეგებს არსებითი როლი გააჩნია იმისათვის, რომ მომდევნო პარაგრაფში დადგენილი იქნეს საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{A}$ ან $\mathbf{B}$ თვისება.

ვთქვათ, $t_0 \in \mathbb{R}_+$. U_{ℓ,t_0} - ით აღვნიშნოთ (1.1) განტოლების ყველა წესიერი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1) პირობებს.

<u>**თეორემა 3.1**</u> ვთქვათ სრულდება (1.2) , (1.3) პირობები , $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია, $(\ell+n)$ ლუწია.

$$|F(u)(t)| \geq P(t)\,\omega(u(\sigma(t))),\ \text{როცა}\ t \geq t_0,\quad u \in H_{t_{0,\tau}},\quad \sigma(t) \geq t \tag{3.1}$$

და

$$\int_0^{+\infty} p(t)\ \omega\Big(\frac{1}{\ell\,!}\,\sigma^{\ell-1}(t)\Big)\, t^{n-\ell}\,dt = +\infty\ , \tag{3.2}$$

სადაც

$$P \in L_{loc}(\mathbb{R}_+;\ \mathbb{R}_+),\ \ \omega(0)=0,\ \omega(s)>0,\ \text{როცა}\ s>0,\ \omega\ \text{არაკლებადია} \tag{3.3}$$

$$\exists\, c>0,\ \ \omega(x,y) \geq c\,\omega(x)\omega(y), \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty \tag{3.5}$$

გარდა ამისა, თუ რომელიმე $t_1 \in \mathbb{R}_+$ - თვის $U_{\ell,t_1} \neq \emptyset$, მაშინ ნებისმიერი $k \in N$ -თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1}\,P(t)\,\omega\Big(\frac{\sigma^{\ell-1}(t)}{\ell\,!}\ \rho_{\ell,k}(\sigma(t))\Big)\,dt < +\infty \tag{3.6}$$

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1}\,P(t)\,\omega(t)\,\omega(\sigma^{\ell-1}(t))\,dt < \infty, \tag{3.7}$$

სადაც

$$\rho_{\ell,1}(t) = \Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\ell!(n-\ell)!}\int_0^t\int_s^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,P(\xi)\,\omega(\sigma(\xi))\,d\xi ds \tag{3.8}$$

$$\rho_{\ell,k}(t) = \frac{C}{(n-\ell)!}\int_0^t\int_s^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,P(\xi)\,\omega(\sigma(\xi))\,\omega(\rho_{k-1}((\sigma(\xi)))\,d\xi ds \tag{3.9}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $t_0 \in \mathbb{R}_+$ და $U_{\ell,t_0} \neq \emptyset$. U სიმრავლის განმარტების თანახმად (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი ამონახსნი $u \in U_{\ell,t_0}$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1) პირობას. (2.1) - ის და (3.2) - ის თანახმად, (1.1) დან ცხადია, რომ სრულდება (2.11) ამრიგად სრულდება ლემა (2.3) , (2.12) პირობები და

$$u^{(\ell-1)}(t) \geq \frac{t}{(n-\ell)!} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} \, |P(s)| \, \omega(u(\sigma(s)))\, ds +$$

$$\frac{1}{(n-\ell)!} \int_{t_0}^{t} s^{n-\ell} \, |P(s)| \, \omega(u(\sigma(s)))\, ds \tag{3.10}$$

სადაც t_0- საკმარისად დიდი რიცხვია. (3.10) უტოლობიდან, თუ გავითვალისწინებთ (2.5) -ს, მივიღებთ

$$u^{(\ell-1)}(t) \geq \frac{t}{(n-\ell)!} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} \, |P(s)| \, \omega(u(\sigma(s)))\, ds +$$

$$\frac{1}{(n-\ell)!} \int_{t_0}^{t} sd \int_s^{+\infty} \xi^{\,n-n-1} \, |P(\xi)| \, \omega(u(\sigma(\xi)))\, d\xi =$$

$$\frac{t}{(n-\ell)!} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} |P(\xi)| \omega(u(\sigma(\xi))) d\xi - \frac{t}{(n-\ell)!} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} |P(s)| \omega(u(\sigma(s)))\, ds +$$

$$\frac{1}{(n-\ell)!} \int_o^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} \, |P(s)| \, \omega(u(\sigma(s)))\, ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{(n-\ell)!} \int_o^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} \, |P(\xi)| \, \omega\left(\frac{1}{\ell!} \sigma^{\ell-1}(\xi)\, u^{(\ell-1)}(\sigma(\xi))\right) d\xi ds,$$

როცა , $t \geq t_0$.

აქედან თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sigma(t) \geq t$ და $u^{(\ell-1)}(t)$ არაკლებადია მივიღებთ

$$y(t) \geq \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \int_o^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} |P(\xi)| \, \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi)\, y(\xi)) d\xi ds \tag{3.11}$$

სადაც

$$y(t) = \frac{1}{\ell!} u^{(\ell-1)}(t) . \tag{3.12}$$

(3.11) -დან თუ გავითვალისწინებთ (3.4) -ს გვაქვს

$$y(t) \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} \ |P(\xi)| \ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ \omega(y(\xi))\ d\xi ds \qquad (3.13)$$

სადაც $c > 0.$

აღვნიშნოთ

$$x(t) = \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1}\ |P(\xi)|\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ \omega(y(\xi))\ d\xi ds \qquad (3.14)$$

(3.13) და (3.14) - ის თანახმად გვაქვს

$$x'(t) \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} |P(\xi)|\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ \omega(x(\xi))\ d\xi$$

რადგან ω და x ფუნქციები არაკლებადია, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$x'(t) \geq \frac{c\omega(x(t))}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1}\ |P(\xi)|\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi)\ |d\xi \quad \text{ე.ი.}$$

$$\frac{x'(t)}{\omega(x(t))} \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1}\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ |P(\xi)|\ d\xi\ .$$

თუ უკანასკნელ უტოლობას ვაინტეგრებთ t_0-დან t - მდე, მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)\,ds}{\omega(x(s))} \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1}\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ |P(\xi)| d\xi ds$$

მაშასადამე

$$\int_{x(t_1)}^{x(t)} \frac{d\xi}{\omega(\xi)} \geq \frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_1}^{t}\int_{s}^{+\infty} \xi^{n-\ell-1}\ \ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\ |P(\xi)|\ d\xi\, ds \ \ , \text{როცა} \ \ t \geq t_1 \ . \qquad (3.15)$$

აღვნიშნოთ

$$\Phi(t) = \int_{1}^{t} \frac{d\xi}{\omega(\xi)}$$

და Φ^{-1} აღვნიშნოთ მისი შექცეული ფუნქცია, ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ ,

რომ $x(t_1) \geq 1$, მაშინ (3.15) -დან მივიღებთ

$$x(t) \geq \Phi^{-1}\left(\frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\int_{t_1}^{t}\int_{s}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\ \omega(\sigma^{\ell-1}(\xi))\,|P(\xi)|d\xi\, ds\right) \tag{3.16}$$

ე.ი. (3.12) და (3.13) -ის თანახმად

$$u^{\ell-1}(t) \geq \rho_{\ell,k,t_1}(t), \text{ როცა } t \geq t_1, \tag{3.17}$$

სადაც

$$\rho_{\ell,k,t_1} = \Phi^{-1}\left(\frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\int_{t_1}^{t}\int_{s}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,|p(\xi)|\,\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(\xi)\,\rho_{\ell,k-1,t_1}\sigma(\xi)\right)d\xi ds\right)$$

როცა, $t \geq t_1$ $(k = 2,3\ldots)$. (3.18)

$\rho_{\ell,1,t}$ მოცემულია (3.8) ფორმულით. (3.18) და (3.19) - ის თანახმად (3.10) დან ნებისმიერი $k \in N$ -სთვის მივიღებთ

$$\int_{t}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,|P(\xi)|\,\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(\xi)\,\rho_{\ell,k,t_1}(\sigma(\xi))\right)d\xi \leq \frac{u^{(\ell-1)}(t)}{t}, \text{ როცა } t \geq t_1$$

ამიტომ (2.3) ლემის თანახმად, რადგან

$\frac{u^{(\ell-1)}(t)}{t}\downarrow$, როცა $t \to +\infty$, გვაქვს

$$\int_{t_1}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,|p(\xi)|\,\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(\xi)\,\rho_{\ell,k,t_1}(\sigma(\xi))\right)d\xi < +\infty. \tag{3.19}$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ (3.4)-ს (3.10) დან მივიღებთ

$$\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(t)u^{\ell-1}(t)\right) = c_1\,\omega(t\,\sigma^{\ell-1}(t))\,\omega\left(\int_{t}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,|p(\xi)|\,\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(\xi)\,u^{\ell-1}(\xi)\right.\right.$$
$$\left.\left. d\xi\right)\right),$$

სადაც $c_1 = \omega\left(\frac{c}{(n-\ell)!}\right)$. აქედან გვაქვს

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(t)\,u^{\ell-1}(t)\right)}{\omega\left(\int_{t}^{+\infty}\xi^{n-\ell-1}\,|P(\xi)|\,\omega\left(\frac{1}{\ell!}\sigma^{\ell-1}(\xi)u^{\ell-1}(\xi)\right)d\xi\right)} \geq c_1\,\omega(t\,\sigma^{\ell-1}(t)), \text{ როცა}$$

$t \geq t_1$.

მაშასადამე

$$\frac{t^{n-\ell-1}\,|\,p\,(t)|\;\omega\;(\frac{1}{\ell!}\;\sigma^{\ell-1}\,(t)\,u^{\ell-1}\;(t))}{\omega\Big(\;\int_t^{+\infty}\xi^{\;n-\ell-1}\;|P\,(\xi\,)\Big|\omega\,(\;\frac{1}{\ell!}\;\sigma^{\ell-1}\,(\,\xi\,)u^{\ell-1}\;(\,\xi\,)d\xi}\geq\;c_1\;t^{n-\ell-1}\;|\;p(t)|\;\omega(\;t\;\sigma^{\ell-1}$$

$(t)\;)$, როცა $t\;\geq\;t_1$.

თუ უკანასკნელ უტოლობას ვაინტეგრებთ t_1- დან t - მდე, მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t}\;\frac{s^{n-\ell-1}\,|\,P(s)|\;\omega\;\left(\frac{1}{\ell!}\;\sigma^{\ell-1}\,(s)\;u^{\ell-1}\;\;(s)\right)ds}{\omega\left(\;\int_s^{+\infty}\xi^{\;n-\ell-1}\;|P(s)\right|\;\omega(\;\frac{1}{\ell!}\;\sigma^{\ell-1}\,(\xi\;\;)u^{\ell-1}\,(\,\xi\,)d\xi\,)}\;\;\geq$$

$$c_1\int_{t_1}^{t}s^{n-\ell-1}\,|P(s)|\;\omega(\;s\;\sigma^{\ell-1}(s))ds$$

მაშასადამე

$$-\;\int_{y\,(t_1)}^{y\,(t)}\frac{d\xi}{\omega(\xi\,)}\;\geq c_1\int_{t_1}^{t}s^{n-\ell-1}\;\;|P\;(s)|\;\omega(\;s\;\sigma^{\ell-1}(s))\;ds$$

, როცა $t\;\geq\;t_1$,

სადაც $y(t)=\;\int_t^{+\infty}\xi^{\;n-\ell-1}\;\;|\;p\;(\xi)|\;\omega(\;\frac{1}{\ell!}\;\sigma^{\ell-1}\;(\xi)\;u^{\ell-1}\;(\xi)\;d\xi.$ ე.ი

$$c_1\int_{t_1}^{t}s^{n-\ell-1}\;\;|\;P(s)|\omega(\;s\;\sigma^{\ell-1}(s))\;ds\;\leq\;\int_0^{y\,(t_1)}\frac{d\xi}{\omega\,(\xi\,)}$$

ამიტომ (3.5) -ის თანახმად

$$\lim_{t\to+\infty}\;\int_{t_1}^{t}s^{n-\ell-1}\,|\;P(s)|\;\omega(\;s\;\sigma^{\ell-1}(s))\;ds\;<+\infty\;,$$

ე.ი.

$$\int_{t_1}^{+\infty}s^{n-\ell-1}\,|P(s)|\;\omega(\;s\;\sigma^{\ell-1}(s))\;ds\;<+\infty\;, \tag{3.21}$$

რადგან

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\rho_{\ell,k,}}{\rho_{\ell,k,t_1}\,(t)}\;=1\;,\quad k=1,2,\ldots\qquad ,$$

ამიტომ (3.20) და (3.21) -დან ცხადია გამომდინარეობს (3.6) და (3.7) უტოლობები,რაც ამტკიცებს (3.1) თეორემის სამართლიანობას.

4. საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას არ გააჩნდეს (2.1) ტიპის ამონახსნი.

__თეორემა 4.1__ ვთქვათ სრულდება (1.2) , (1.3), (3.1) და (3.2) პირობები, $\ell \in \{ 1 , \dots , n -1 \}$, სადაც $\ell + n$ კენტია, ($\ell + n$ ლუწია).
გარდა ამისა, თუ რომელიმე $k \in N$ - თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1} \; P(t)\, \omega(\, \sigma^{\ell-1}(t)\, \rho_{\ell,k}\, (\sigma\, (\xi)))dt = +\infty\,, \tag{4.1}$$

ან

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1} \, |P(t)|\, \omega\,(t)\, \omega\,(\, \sigma^{\ell-1}(t))\, dt = +\infty\,, \tag{4.2}$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_+$ - თვის , $U_{\ell,t_0} = \emptyset$, სადაც $\rho_{\ell,k}$ ფუნქცია მოცემულია (3.8) და (3.9) ტოლობებით .

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს $t_0 \in \mathbb{R}_+$ ისეთი, რომ $U_{\ell,t_0} \neq \emptyset$, ამრიგად (1.1) განტოლებას აქვს წესიერი ამონახსნი $u : [\, t_0 \,; +\infty) \to (\, 0; +\infty)$, რომელიც აკმაყოფილებს (2.1) პირობას , სადაც $\ell \in \{ 1,\dots, n -1 \}$, $\ell + n$ კენტია, ($\ell + n$ ლუწია), რადგან სრულდება (3.1) თეორემის პირობები ამიტომ სრულდება (3.6) და (3.7) უტოლობა. ეს კი ეწინააღმდეგება (4.1) ან (4.2) პირობებს, მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

__შედეგი 4.1.__ ვთქვათ სრულდება (1.2) , (1.3) და (3.1) პირობები სადაც, $\ell \in \{ 1 ,\dots, n -1 \}$, $\ell + n$ კენტია.
($\ell + n$ ლუწია) და რომელიმე $\alpha \in (0,1)$ - თვის

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\alpha} \; \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1}\, P(s)\, \omega(\; \sigma^{\ell-1}(s))ds \; > 0 \tag{4.3}$$

და ნებისმიერი $c > 0$ -თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1}\, P(t)\, \omega(\; \frac{1}{\ell!}\; \sigma^{\ell-1}\,(t)\; \Phi^{-1}\,(\, c\, \sigma^{1-\alpha}\,(t)\,)dt = +\infty\,. \tag{4.4}$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_+$ -თვის $U_{\ell,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. (4.3)-ის თანახმად მოიძებნა $c > 0$ და $t_1 \geq t_0$ ისეთი, რომ

$$t^{\alpha} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} P(s)\, \omega(\sigma^{\ell-1}(s))ds \geq c \text{ , როცა } t \geq t_1$$

ამიტომ, (3.8) - ის თანახმად გვაქვს

$$\rho_{\ell,1} (t) \geq \Phi^{-1} \left(\frac{c}{\ell!(n-\ell)!} \int_{t_1}^{t} s^{-\alpha}\, ds \right) = \Phi^{-1}\left(\frac{c}{\ell!(n-\ell)!(1-\alpha)} (1- \alpha - 1 - \alpha)\right) \text{ როცა}$$

$t \geq t_1$, მაშასადამე

$$\rho_{\ell,1}(t) \geq \Phi^{-1} (c_1 t^{1-\alpha}) \text{ , როცა } t \geq 2 t_1 , \tag{4.5}$$

სადაც

$$c_1 = \frac{c_0}{2\ell!(n-\ell)!(1-\alpha)} .$$

ამიტომ (4.4) -ის თანახმად ცხადია სრულდება (4.1) პირობა k=1 - ის შემთხვევაში ე.ი. სრულდება 4.1 თეორემის პირობები, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 4.2. ვთქვათ სრულდება (1.2) ,(1.3) პირობები

$$| F(u)(t) | \geq P(t) |u(\sigma (t))|^{\lambda} \text{ , როცა } t \geq t_0, \ u \in H_{t_0,\tau} \tag{4.6}$$

რომელიმე $\alpha \in (0,1)$ - თვის

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\alpha} \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1} P(s)\, \sigma^{\lambda(\ell-1)}(s)\, ds > 0 , \tag{4.7}$$

სადაც $P \in L_{loc}(\mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_+)$, $0 < \lambda < 1$, $\ell \in \{ 1 ,..., n -1 \}$, სადაც $\ell + n$ კენტია, ($\ell + n$ ლუწია) და არსებობს $\alpha > 1$ ისეთი, რომ

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\sigma(t)}{t^{\alpha}} > 0 . \tag{4.8}$$

გარდა ამისა, თუ

$$\alpha\lambda \geq 1 \tag{4.9}$$

ან $\alpha\lambda < 1$ და საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$ - თვის

$$\int_0^{+\infty} s^{n-\ell-1+\frac{\alpha\lambda(1-\alpha)}{1-\alpha\lambda}-\varepsilon}(\sigma(t)^{\lambda(\ell-1)}P(t)dt = +\infty \tag{4.10}$$

მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in \mathbb{R}_+$ -თვის, $U_{\ell,t_0} = \emptyset$.

დამტკიცება. (4.5) -ის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.1) პირობა, სადაც $\omega(s) = s^\lambda$. მართლაც (4.7), (4.8) -ის თანახმად არსებობს $c > 0$ და $t_1 \in [t_0, +\infty)$ ისეთი, რომ

$$t^\alpha \int_t^{+\infty} s^{n-\ell-1}\ \sigma^{\lambda(\ell-1)}(s)\ P(s)ds\ \geq c, \text{ როცა } t \geq t_1. \tag{4.11}$$

და

$$\sigma(t) \geq c\, t^\alpha, \text{ როცა } t \geq t_1\ . \tag{4.12}$$

(4.11), (4.12 და (3.8) -ის თანახმად, რომ $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho_{\ell,1}(t) = +\infty$, ამიტომ ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\rho_{\ell,1}(t) \geq 1$, როცა $t \geq t_1$ ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\omega(s) = s^\lambda$$

მაშინ (4.11) - ის თანახმად (3.9) -დან მივიღებთ

$$\rho_{\ell,2}(t)\ \geq\ \frac{c}{\ell!(n-\ell)!}\int_{t_1}^{t} s^{-\alpha}\,ds = \frac{c}{\ell!(n-\ell)!(1-\alpha)}\ (t^{1-\alpha} - t_1^{\,1-\alpha}), \text{ როცა } t \geq t_1.$$

ამიტომ

$$\rho_{\ell,2}(t)\ \geq\ \frac{ct^{1-\alpha}}{2\ell!(n-\ell)!(1-\alpha)} \text{ როცა } t \geq 2\,t_1.$$

თუ გავაგრძელებთ ამ შეფასებას ნებისმიერი $k_0 \in N$ -თვის მოიძებნება t_{k_0} ისეთი, რომ

$$\rho_{\ell,k_0}(t) \geq \left(\frac{c}{2\ell!(n-\ell)!(1-\alpha)}\right)^{1+\lambda+\cdots+\lambda_0^{\,k+2}} t^{(1-\alpha)(1+\alpha\lambda+\cdots+(\alpha\lambda)^{k_0-2}}, \text{ როცა }$$

$$t \geq t_{k_0}. \tag{4.13}$$

დავუშვათ,რომ სრულდება (4.9) პირობა, შევარჩიოთ k_0 ისე ,რომ

$$\rho_{\ell,k_0}(t) \geq\ c_0\, t^{\frac{1}{\lambda}}, \text{ როცა } t \geq t_{k_0}.$$

სადაც $c_0 > 0$. ამ შემთხვევაში (4.7) -ის თანახმად ცხადია სრულდება (4.1) პირობა, სადაც

$\omega(s) = s^{\lambda}$, ე.ი სრულდება 4.1 თეორემის პირობები რაც (4.9) -ის შემთხვევაში ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას. თუ $\alpha\lambda < 1$, (4.10)-ის გამოყენებით ანალოგიურად ვაჩვენებთ რომ სრულდება (4.1) რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

5. დიფერენციალური განტოლებები A თვისებით

მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** თვისება, სადაც არსებითად გამოყენებული იქნება მე-4 პარაგრაფში მიღებული შედეგი.

<u>თეორემა 5.1.</u> ვთქვათ $F \in V_{\tau}$, სრულდება (1.2), (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია სრულდება (3.2)-(3.5) და რომელიმე $k \in N$-სთვის (4.1) პირობები. მაშინ თუ კენტი n - ის შემთხვევაში

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}\, P(t)dt = +\infty, \tag{5.1}$$

(1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u : [\, t_0; +\infty) \to (\, 0\, ; +\infty)$, (შემთხვევა, როცა $u(t) < 0$ განიხილება ანალოგიურად), მაშინ (1.1), (1.2) და 2.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0,\dots,n-1\}$ ისეთი, რომ $\ell+ n$ კენტია და სრულდება (2.1) პირობები. რადგან სრულდება 4.1 თეორემის პირობები, ამიტომ $\ell \notin \{1,\dots,n-1\}$.
ვაჩვენოთ, რომ თუ n კენტია და $\ell = 0$ მაშინ სრულდება (1.4) პირობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = c$, სადაც $c > 0$. ამიტომ მოიძებნება $t_1 > t_0$ ისეთი, რომ $u(t) \geq \frac{c}{2}$, როცა $t \geq t_1$. ამიტომ (1.1)-დან მივიღებთ

$$\sum_{i=o}^{n-1}(n-i-1)!\, {t_1}^{i})\, |u^{(i)}(t_1)| \geq \omega(\tfrac{c}{2})\int_{t_1}^{t} s^{n-1}\, P(s)ds.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე უკანასკნელ უტოლობაში, როცა $t \to +\infty$, მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{+\infty} s^{n-1}\, P(s)ds < +\infty.$$

მიღებული უტოლობა ეწინააღმდეგება (5.1) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $c = 0$. მაშასადამე თუ n კენტია და $\ell = 0$ მაშინ სრულდება (1.4) პირობები,
მაშასადამე (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.2 ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2) , (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots,n-1\}$-თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია სრულდება (3.2)-(3.5), (4.2) პირობები. გარდა ამისა თუ კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

შედეგი 5.1 ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2), (4.6) პირობები, სადაც

$P \in L_{loc}(R_+; R_+),\ 0 < \lambda < 1,$

$$\sigma(t) \geq t, \text{ როცა } t \in \mathbb{R}_+ , \tag{5.2}$$

და ნებისმიერი $\ell \in \{0,\dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია რომელიმე $k \in N$-თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1} P(t) (\sigma(t))^{\lambda(\ell-1)} \rho_{\ell,k,\lambda}(\sigma(t))dt = +\infty. \tag{5.3}$$

ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება, სადაც

$$\rho_{\ell,1,\lambda}(t) = \left(\int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-\ell-1} P(\xi)\sigma^{\ell-1}(\xi)d\xi\, ds \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \tag{5.4}$$

$$\rho_{\ell,k,\lambda}(t) = \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-\ell-1+\lambda} \sigma^{\lambda(\ell-1)}(\xi)\, \rho_{\ell,k-1,\lambda}{}^{\lambda}(\sigma(\xi)d\xi\, ds \ (k=2,3,\dots) . \tag{5.5}$$

დამტკიცება. შედეგის პირობებში მარტივად ჩანს, რომ სრულდება 5.1 თეორემის პირობები, სადაც

$$\omega(s) = s^\lambda .$$

შედეგი 5.2 ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2), (4.6), (5.2) პირობები და ნებისმიერი

$\ell \in \{1,\dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია

$$\int_0^{+\infty} t^{n-\ell-1+\lambda} P(t)\, \sigma^{\lambda(\ell-1)}(t)dt = +\infty$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ რომ, სრულდება 5.2 თეორემის პირობები, სადაც $\omega(s) = s^{\lambda}$.

<u>თეორემა 5.3</u> ვთქვათ $F \in V_{\tau}$, სრულდება (1.2), (3.1)-(3.5) პირობები

$$\lim_{t\to+\infty} \inf \frac{\omega(\sigma(t))}{t} > 0 \tag{5.6}$$

გარდა ამისა რომელიმე $k \in N$-თვის

$$\int_0^{+\infty} t^{n-2} P(t)\, \omega(\rho_{1,k,}(\sigma(t)))\, dt = +\infty \tag{5.7}$$

და კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება, სადაც

$$\rho^*{}_1(t) = \Phi^{-1}\Big(\frac{c_0}{\ell!(n-\ell)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-2}\, P(\xi) d\xi ds\Big) \tag{5.8}$$

$$\rho^*{}_k(t) = \Big(\frac{c_0}{(n-\ell)!} \int_0^t \int_s^{+\infty} \xi^{n-2}\, \omega(\rho^*{}_{k-1}(\sigma(t)) d\xi dt, \tag{5.9}$$

სადაც c_0 ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.1) პირობა. მართლაც (3.4) და (5.6) -ის თანახმად არსებობს $c_0 > 0$ ისეთი, რომ

$$\frac{\omega\left(\sigma^{\ell-1}(t)\right)}{t^{\ell-1}} \geq c_0 \qquad (\ell = 1,\dots, n\text{-}1) \tag{5.10}$$

ამიტომ (3.8), (3.9), (5.8) და (5.9) -ის ძალით ცხადია, რომ

$$\rho_{\ell,1}(t) \geq \rho^*{}_1(t), \dots , \ \rho_{\ell,k,}(t) \geq \rho^*{}_n(t). \quad (\ell = 1,\dots, n\text{-}1).$$

ამიტომ (3.4) და (5.10)-ის თანახმად ცხადია არსებობს $c_1 > 0$ ისეთი, რომ

$$\frac{\omega\, (\sigma^{\ell-1}(t)\rho_{\ell,k,}(\sigma(t))}{t^{\ell-1}} \geq c_1 \omega(\rho^*{}_k(\sigma(t))), \text{ როცა } t \geq t_1.$$

სადაც t_1 საკმარისად დიდი რიცხვია, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (5.7) -ს ცხადია სრულდება (4.1) პირობა ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots, n-1\}$, სადაც $\ell + n$ კენტია რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

<u>**თეორემა 5.4**</u> ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.2), (3.1)-(3.5) პირობები

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\omega\,(\sigma\,(t))}{t} < +\infty \tag{5.11}$$

გარდა ამისა რომელიმე $k \in N$-თვის,

$$\int_0^{+\infty} P(t)\,(\omega\,(\,\sigma(t)))^{n-2}\omega\,(\,\rho_{0,k}(\,\sigma(t)))\,dt = +\infty \tag{5.12}$$

სრულდება, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება, სადაც

$$\rho^*{}_{0,1}(t) = \Phi^{-1}\Big(\frac{c_0}{\ell!(n-\ell)!}\int_0^t\int_s^{+\infty} P(\xi)(\omega(\sigma(\xi)))^{n-2}d\xi ds\,\Big) \tag{5.13}$$

$$\rho^*{}_{0,\kappa}(t) = \frac{c_0}{(n-\ell)!}\int_0^t\int_s^{+\infty} P(\xi)(\,\omega(\sigma(\xi)))^{n-2}\,\omega(\rho_{0,\kappa-1}(\sigma\,(\xi))d\xi ds,$$

$$k = 2, \dots \tag{5.14}$$

c_0 – ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ℓ -თვის ($\ell + n$ კენტია), სრულდება (4.1) პირობები. მართლაც (5.11)-ის თანახმად არსებობს ისეთი $c_0 > 0$, რომ

$$\frac{t^{\ell-1}}{\omega^{\ell-1}\,(\sigma(t))} \geq c_0\,, \qquad (\ell = 1,\dots,n-1) \tag{5.15}$$

ამიტომ

$$\rho_{\ell,1}(t) \geq \rho^*{}_{0,1}\,,\ \rho_{\ell,k}(t) \geq \rho^*{}_{0,k}\,(t)\,, \qquad \ell = 2,\dots,n-1$$

ამიტომ (3.4) და (5.15) -ის თანახმად გვაქვს

$$t^{n-\ell-1}P(t)\,\omega(\sigma^{\ell-1}(t)\,\rho_{\ell,k}(\sigma(t))) \geq c_1 t^{n-\ell-1}P(t)(\omega(\sigma(t))^{\ell-1}\omega(\rho_{\ell,k}(\sigma(t))) \geq$$

$$c_1\,(\omega(\sigma(t)))^{n-2}\,P(t)\,\frac{t^{n-\ell-1}}{(\omega(\sigma(t)))^{n-\ell-1}}\,\omega(\rho^*{}_{0,\kappa}(\sigma(t))) \geq$$

$$c_1\,c_0P(t)\,(\omega\big(\sigma(t)\big))^{n-2}\omega(\rho^*{}_{0,k}(\sigma(t)))\,,$$

სადაც $c_1 > 0$ რაიმე რიცხვია, ამიტომ (5.1) -დან ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots,n\text{-}1\}$ -თვის, სადაც $\ell + n$ კენტია, გამომდინარეობს (4.1) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

<u>**თეორემა 5.5**</u> ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2), (3.1)-(3.5) პირობები და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-2}\,\omega(t)P(t)dt = +\infty \tag{5.16}$$

გარდა ამისა, თუ კენტი n-ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n\text{-}1\}$ -თვის, სრულდება (4.2) პირობა. მართლაც (5.6)-ის თანახმად, რადგან

$$\frac{\omega(\sigma^{\ell-1}(t))}{t^{\ell-1}} \geq c > 0\ , \quad \text{როცა } t \geq t_1$$

სადაც t_1 -საკმარისად დიდი რიცხვია, ამიტომ (5.16) -დან გამომდინარეობს (4.2) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.
თუ გავითვალისწინებთ 5.2 შედეგს მარტივად დავრწმუნდებით შემდეგი შედეგის სამართლიანობაში.

<u>**თეორემა 5.6**</u> ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2), (3.1)-(3.5) და (5.11) პირობები მაშინ იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს **A** თვისება საკმარისია

$$\int_0^{+\infty} \mid P(t) \mid \omega(t)(\omega(\sigma(t)))^{n-2}dt = +\infty\,. \tag{5.17}$$

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (5.11)-ის თანახმად

$$\frac{t}{\omega(\sigma(t))} \geq c, \text{ როცა } t \geq t_0$$

სადაც $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $c > 0$ რაიმე დადებითი რიცხვია, ამიტომ (3.4) -ის თანახმად მოიძებნება , ისეთი $c_0 > 0$ და $t_1 > t_0$ ისეთი , რომ

$$(\omega(\sigma(t)))^{n-2} \leq c_0 t^{n-\ell-1}\omega(\sigma(t))^{\ell-1}, \text{ როცა } t > t_1,\ \ell \in \{1,..., n\text{-}1\},$$

ამიტომ ცხადია, რომ (5.17) პირობის თანახმად, ცხადია სრულდება (4.9) ნებისმიერი $\ell \in \{1,..., n\text{-}1\}$, $\ell + n$ კენტია, მეორეს მხრივ თუ დავუშვებთ, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u: [\, t_0; +\infty) \to (\, 0; +\infty)$, 4.1 თეორემის თანახმად $\ell \in \{1,..., n\text{-}1\}$. თუ n კენტია და $\ell = 0$, რადგან (5.17)-დან გამომდინარეობს (5.1) პირობა , ამიტომ ცხადია u ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობას , რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.
ანალოგიურად მტკიცდება ქვემოთ მოყვანილი შედეგები.

<u>შედეგი 5.3</u> ვთქვათ $F \in V_\tau$ სრულდება (1.2), (4.6), (5.2) პირობები

$$\lim_{t\to+\infty} \inf \frac{\sigma^\lambda(t)}{t} > 0$$

და

$$\int_0^{+\infty} t^{n-2+\lambda}\, P(t)dt = +\infty,$$

მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

<u>შედეგი 5.4</u> ვთქვათ $F \in V_\tau$, სრულდება (1.2), (4.6), (5.2) პირობები

$$\lim_{t\to+\infty} \sup \frac{\sigma^\lambda(t)}{t} < +\infty$$

და

$\int_0^{+\infty} t^\lambda\ \sigma^{\lambda(n-2)}(t)\, P(t)dt = +\infty$, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **A** თვისება.

6. დიფერენციალური განტოლებები B თვისებით

<u>**თეორემა 6.1**</u> ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n-1\}$ -თვის ,სადაც $\ell + n$ ლუწია, სრულდება (3.2)-(3.5) და (4.1) პირობები, გარდა ამისა, თუ

$$\int_0^{+\infty} P(t)\omega\left(\sigma^{\ell-1}(t)\right)dt = +\infty \qquad (6.1)$$

და ლუწი n -ის შემთხვევაში სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u : [\, t_0; +\infty) \to (\, 0\, ; +\infty)$. მაშინ (1.1), (1.3) და 2.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0,\ldots, n-1\}$ ისეთი, რომ $\ell + n$ ლუწია და სრულდება (2.1) პირობები. რადგან სრულდება 4.1 თეორემის პირობები, ამიტომ $\ell \notin \{1,\ldots, n-2\}$, სადაც $\ell + n$ ლუწია, მაშასადამე $\ell = n$ ან n ლუწია და $\ell = 0$.
ვთქვათ $\ell = n$, მაშინ (2.1)-ის თანახმად არსებობს $c > 0$ და $t_o \in R_+$ ისეთი, რომ

$$u(\sigma(t)) \geq c\,\sigma(t)$$

ამიტომ (1.1), (3.1) და (2.1) -ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$u^{(n-1)}(t) \geq u^{(n-1)}(\, t_0) + \int_{t_0}^{t} P(s)\omega\,(c\,\sigma^{(n-1)}(s)\,ds$$

საიდანაც (6.1) -ის თანახმად გვაქვს

$$\lim_{t\to+\infty} u^{(n-1)}(t) = +\infty,$$

ე.ი (2.1) -ის თანახმად $\ell = n-1$ -ის შემთხვევაში სრულდება (1.5) პირობა. თუ დავუშვებთ, რომ n ლუწია და $\ell = 0$, მაშინ 5.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (1.4) პირობა. მაშასადამე (1.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

<u>**თეორემა 6.2**</u> ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1) პირობები და ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n-2\}$-თვის, სადაც $\ell + n$ ლუწია სრულდება (3.2)-(3.5) და (4.2) პირობები.

გარდა ამისა თუ სრულდება (6.1) პირობა და როცა n ლუწია და $\ell = 0$ სრულდება (5.1) პირობა, მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება.

<u>**შედეგი 6.1**</u> ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (4.6), (4.8), (5.17) პირობები და რომელიმე $\alpha \in (0;1)$ - თვის

$$\lim_{t \to +\infty} \inf t^{\alpha} \int_t^{+\infty} s^{n-2} \ |p(s)|ds > 0 \tag{6.2}$$

მაშინ იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება საკმარისია, რომ

$$\alpha\lambda \geq 1 \tag{6.3}$$

ხოლო, თუ $\alpha\lambda < 1$, საკმარისია

$$\int_0^{+\infty} s^{n-2} + \frac{\alpha\lambda(1-\alpha)}{1-\alpha\lambda} - \varepsilon \ \ |p(t)|dt = +\infty, \tag{6.4}$$

სადაც ε რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

დამტკიცება. ვთქვათ (1.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი არარხევადი ამონახსნი $u : [t_0; +\infty) \to (0; +\infty)$, მაშინ (1.1), (1.3) და 2.1 ლემის თანახმად არსებობს $\ell \in \{0,\ldots, n\}$ ისეთი, რომ $\ell + n$ ლუწია და სრულდება (2.1) პირობები. (6.2) და (5.17)-ის თანახმად ცხადია სრულდება ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n-2\}$ -თვის, სადაც $\ell + n$ ლუწია, (4.7) პირობები. მეორეს მხრივ (6.4) და (5.17) - ის თანახმად სრულდება (4.10) პირობა, ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n-2\}$ მაშასადამე სრულდება 4.2 შედეგის ყველა პირობა ნებისმიერი $\ell \in \{1,\ldots, n-2\}$ - თვის სადაც $\ell + n$ ლუწია. ამიტომ 4.2 შედეგის თანახმად $\ell \notin \{1,\ldots, n-2\}$

მეორეს მხრივ (6.2) - ის თანახმად ცხადია სრულდება (5.1) და (5.17) - ის პირობები

$$\int_0^{+\infty} \sigma^{\lambda(n-1)}(t) \ |P(t)| dt = +\infty \tag{6.5}$$

ამიტომ (5.1) და (6.5) - ის თანახმად თუ n ლუწია და $\ell = 0$ (თუ $\ell = n$) 6.2 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (1.4) , (1.5) პირობა, რაც ამტკიცებს ,რომ (1.1) განტოლებას გააჩნია **B** თვისება. შედეგი დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება

<u>**შედეგი 6.2**</u> ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (4.6), (4.8) პირობები,რომელიმე $\alpha \in (0;1)$ -თვის

$$\liminf_{t\to+\infty} t^{\alpha} \int_t^{+\infty} P(s)\, \sigma^{\lambda(n-2)}(s) ds > 0 ,$$

მაშინ იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს **B** თვისება საკმარისია შესრულდეეს (6.3) პირობა, ხოლო თუ $\alpha\lambda < 1$, მაშინ საკმარისია

$$\int_0^{+\infty} s^{1+\frac{\alpha\lambda(1-\alpha)}{1-\alpha\lambda} - \varepsilon} (\sigma(t))^{\lambda(n-3)} P(t) dt = +\infty$$

სადაც $\varepsilon < 0$ რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

__შედეგი 6.3__ ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1)-(3.5) და (5.17) პირობები, გარდა ამისა, თუ სრულდება (5.16) და (6.1), მაშინ (1.1) განტოლებას გააჩნია $\mathbf{B}$ თვისება.

__შედეგი 6.4__ ვთქვათ $F \in V(\tau)$, სრულდება (1.3), (3.1)-(3.5), (5.18) და (6.1), მაშინ იმისათვის, რომ (1.1) განტოლებას გააჩნდეს $\mathbf{B}$ თვისება საკმარისია, რომ

$$\int_0^{+\infty} tP(t)\,\omega(t)\,(\omega(\sigma(t)))^{n-3}dt = +\infty \tag{6.6}$$

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (5.18), (3.4) და (6.6)-ის თანახმად სრულდება 4.2 პირობები ნებისმიერი $\ell \in \{1,\dots, n-2\}$, სადაც $\ell + n$ ლუწია.

ლიტერატურა

1. I.Kiguradze and I. Stavroulakis : On the oscilations of higer order Emden-Folwer advanced differential equations. Appl. Anal 70 (1998), 97-112

2. R.koplatadze : On asymptotic behavior of solutions of n-th order Emden-Folwer differential equations with advanced argument,Czechoslovak Math.j 60(135) (2010) no.3 817833

3. R.koplatadze and T.Chanturia On oscilatory properties of differential equations with deviating argument.Tbilisi State University Press, Tbilisi (1997)

4. R.koplatadze, On oscilatory properties of solutions of functional-differential equations.Mem.Differential Equations Math.Phys.3 (1994).